Point de vue géométrique

Comme H est un hyperplan de E, il existe un vecteur $n_0 \neq 0_E$ tel que

$$E = H \oplus \mathbb{R} \cdot n_0.$$

(En fait, n'importe quel vecteur de H peut jouer le rôle du vecteur n_0.)

Cette décomposition en somme directe signifie que, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur $p(x) \in H$ et un unique scalaire $u(x) \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = p(x) + u(x) \cdot n_0.$$

L'unicité de cette décomposition permet de démontrer que p est un endomorphisme de E et que u est une forme linéaire sur E (démonstration classique).

En particulier,

$$n_0 = \underbrace{0_E}_{\in H} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{R}} \cdot n_0$$

et l'unicité de la décomposition prouve que $u(n_0) = 1$, en particulier : la forme linéaire u n'est pas identiquement nulle.

On en déduit que

$$\begin{aligned} x \in H &\iff u(x) \cdot n_0 = 0_E \\ &\iff u(x) = 0 && (\text{car } n_0 \neq 0_E) \\ &\iff x \in \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

c'est-à-dire $H = \operatorname{Ker} u$.

Ainsi, il existe bien une forme linéaire non nulle u dont le noyau est égal à H.

❧ Si la forme linéaire $u \circ f$ est proportionnelle à u, il existe un scalaire λ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad (u \circ f)(x) = \lambda \cdot u(x).$$

En particulier, comme $H = \operatorname{Ker} u$,

$$\forall\, x \in H, \quad u\big[f(x)\big] = \lambda \cdot u(x) = 0_E,$$

ce qui prouve que $f(x) \in \operatorname{Ker} u = H$ et donc que l'hyperplan H est stable par f.

❧ Réciproquement, si l'hyperplan H est stable par u, alors on déduit de la décomposition

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in H} + u(x) \cdot n_0$$

que

$$\begin{aligned} \forall\, x \in E, \quad (u \circ f)(x) &= u\big[\underbrace{f\big(p(x)\big)}_{\in H = \operatorname{Ker} u}\big] + u(x) \cdot u\big[f(n_0)\big] \\ &= \underbrace{u\big[f(n_0)\big]}_{\in \mathbb{R}} \cdot u(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u \circ f = \lambda \cdot u \quad \text{avec} \quad \lambda = u\big[f(n_0)\big] \in \mathbb{R}.$$

On a donc démontré que l'hyperplan H était stable par f si, et seulement si, la forme linéaire $u \circ f$ était proportionnelle à u.

Remarque.— On aurait aussi pu appliquer un résultat du cours : *Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si, et seulement si, leurs noyaux sont égaux.*

❧ D'après la question précédente, l'hyperplan H est stable par f si, et seulement si,

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}, \quad u \circ f = \gamma u$$

c'est-à-dire :

$$\exists\, \lambda = -\gamma \in \mathbb{R}, \quad u \circ (f + \lambda I) = \omega_E$$

ce qui équivaut à :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(f + \lambda I) \subset \operatorname{Ker} u = H.$$

❧ Il est clair que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et que $L = \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Matriciellement, l'égalité

$$u \circ f = \gamma \cdot u$$

se traduit par l'égalité

$$LA = \gamma \cdot L$$

c'est-à-dire (en transposant membre à membre) :

$${}^tA\,{}^tL = \gamma \cdot {}^tL.$$

Comme la forme linéaire u n'est pas identiquement nulle, sa matrice L n'est pas la ligne nulle, donc la colonne ${}^tL$ n'est pas la colonne nulle et l'égalité précédente signifie que ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

❧ Il est temps de remarquer/rappeler qu'il existe un lien analytique très simple entre la forme linéaire u et l'hyperplan H : comme

$$\begin{aligned} x \in H &\iff u(x) = 0 \\ &\iff LX = 0 \end{aligned}$$

les coefficients de la ligne L sont en fait les coefficients d'une équation cartésienne de H.

❧ Conclusion : Si l'endomorphisme u et l'hyperplan H sont représentés dans une même base $\mathscr{B}$ par la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et par l'équation cartésienne

$$[LX = 0],$$

alors H est stable par f si, et seulement si, la colonne ${}^tL$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

Point de vue matriciel

L'étude précédente peut être menée par le calcul seul, à condition de choisir une base particulière de E.

❧ Considérons donc une base

$$\mathscr{B}_H = (e_1, \dots, e_{n-1})$$

de l'hyperplan H. D'après le Théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_n tel que

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$$

soit une base de E. (En fait, n'importe quel vecteur n'appartenant pas à H convient pour e_n.)

❧ Décomposons un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathscr{B}_0$:

$$x = \underbrace{x_1 \cdot e_1 + \dots + x_{n-1} \cdot e_{n-1}}_{\in H} + x_n \cdot \underbrace{e_n}_{\notin H}.$$

Il est clair que

$$x \in H \iff x_n = 0$$

et donc que H est le noyau de la forme linéaire

$$u = [x \mapsto x_n]$$

représentée par la ligne

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathscr{B}_0$.

❧ Considérons un endomorphisme f de E, représenté par la matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

dans la base $\mathscr{B}_0$.

La matrice relative à $\mathscr{B}_0$ de la forme linéaire $u \circ f$ est égale à

$$LA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les lignes L et LA sont proportionnelles si, et seulement si,

$$a_{1,1} = \dots = a_{1,n-1} = 0$$

et donc que les formes linéaires u et $u \circ f$ sont proportionnelles si, et seulement si,

$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(matrice triangulaire par blocs) ce qui signifie que l'hyperplan H est stable par f.

REMARQUE.— Dans ce cas, la proportionnalité s'écrit

$$LA = a_{n,n} \cdot L.$$

❧ La représentation matricielle de l'image de $(f + \lambda I)$ est le sous-espace engendré par les colonnes de $(A + \lambda I_n)$. L'image de $(f + \lambda I)$ est donc contenue dans l'hyperplan H si, et seulement si, le dernier coefficient de chaque colonne de $(A + \lambda I_n)$ est nul. Dans le cas particulier où $\lambda = -a_{n,n}$, l'image de $(f + \lambda I)$ est contenue dans H si, et seulement si, le dernier coefficient de chacune des $(n-1)$ premières colonnes est nulles, c'est-à-dire si

$$A = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \star & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Applications numériques

❧ La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

admet -1, 1 et -2 pour valeurs propres : elle est donc diagonalisable.

Si $A = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$, alors il existe une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que

$$D = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{Diag}(-1, 1, 2).$$

Dans cette base $\mathscr{B}$, l'hyperplan représenté par l'équation cartésienne

$$0 = ax + by + cz = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times X$$

est stable par f si, et seulement si, la matrice colonne

$${}^tL = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de ${}^tD = D$. Il y a donc exactement trois plans stables par f :

$$\begin{aligned} H_{-1} &= [x = 0]_{\mathscr{B}} & H_1 &= [y = 0]_{\mathscr{B}} & H_2 &= [z = 0]_{\mathscr{B}} \\ &= \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) & &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) & &= \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

associés respectivement aux trois sous-espaces propres de ${}^tD$:

$$\text{Ker}({}^tD + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}({}^tD - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}({}^tD - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant les vecteurs propres de ${}^tA$, on peut trouver des équations cartésiennes qui représentent ces trois plans dans la base canonique. Comme

$$\text{Ker}({}^tA + I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker}({}^tA - I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker}({}^tA - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on a donc :

$$H_{-1} = [y + z = 0]_{\text{can}}, \quad H_1 = [x + y - z = 0]_{\text{can}}, \quad H_2 = [x - z = 0]_{\text{can}}.$$

❧ La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$$
n'admet qu'une seule valeur propre réelle, car son polynôme caractéristique est égal à
$$(X-1)\Big(X^2+X+\frac{1}{2}\Big).$$
Comme
$$\operatorname{Ker}({}^tA - I_3) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$
l'endomorphisme f admet pour seul plan stable le plan
$$H = [x+2y+3z=0]_{\text{can}}.$$
D'après le Théorème de décomposition des noyaux,
$$E = \operatorname{Ker}(f - I_E) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + f + 1/2\, I_E).$$
Comme le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f - I_E)$ est une droite (puisque $(A - I_3)$ et sa transposée $({}^tA - I_3)$ ont même rang), le sous-espace
$$\operatorname{Ker}(f^2 + f + 1/2\, I_E)$$
est un plan et, en tant que noyau d'un polynôme en f, il est stable par f.

On en déduit que
$$\operatorname{Ker}(f^2 + f + 1/2\, I_E) = [x+2y+3z=0]_{\text{can}},$$
ce qu'on peut vérifier en calculant
$$A^2 + A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$
❧ La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f)$$
admet $X^2(X+2)$ pour polynôme caractéristique (et aussi pour polynôme minimal, puisque $A(A+2I_3) \neq 0_3$, ce qui fait que A n'est pas diagonalisable).

On vérifie sans peine que
$$\operatorname{Ker}({}^tA) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}({}^tA + 2I_3) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$
Par conséquent, il existe exactement deux plans stables par f, représentés dans la base canonique par les équations cartésiennes suivantes.
$$[x+z=0] \qquad [y+z=0]$$
Ici encore, le Théorème de décomposition des noyaux nous dit que
$$E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \operatorname{Ker}(f + 2\, I_E).$$
Comme $\operatorname{Ker}(f + 2\, I_E)$ est une droite, le sous-espace $\operatorname{Ker} f^2$ est un plan et il est stable par f. Comme
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
il est clair que $\operatorname{Ker} f^2 = [y+z=0]_{\text{can}}$.

L'autre plan stable est bien sûr $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f + 2\, I_E)$ (somme directe de deux droites stables).

L'intersection des deux plans stables est représentée par
$$[x+z=0] \cap [y+z=0].$$
C'est donc la droite dirigée par $(1, 1, -1)$ et on vérifie facilement que cette droite est bien égale à $\operatorname{Ker} f$.