❧ Soit X, une colonne telle que $AX = 0$. Alors $A^\top.AX = 0$. Le noyau de A est donc contenu dans le noyau de $A^\top.A$.

Réciproquement, si X est une colonne appartenant au noyau de $A^\top.A$, alors
$$\|A.X\|^2 = X^\top.A^\top.A.X = X^\top.(A^\top.A)X = X^\top.0 = 0,$$
donc $A.X = 0$, c'est-à-dire $X \in \operatorname{Ker} A$.

On a démontré par double inclusion que
$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^\top.A.$$

❧ Soit Y, une colonne appartenant à $\operatorname{Im} A^\top.A$: il existe donc une colonne X telle que $Y = A^\top.A.X$ et, pour toute colonne U appartenant à $\operatorname{Ker} A$,
$$\langle\, U \,|\, Y \,\rangle = U^\top.A^\top.A.X = (AU)^\top.(AX) = 0^\top.(AX) = 0$$
donc $Y \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

On a déjà démontré que $\operatorname{Im} A^\top.A \subset (\operatorname{Ker} A)^\perp$. En outre, d'après le Théorème du rang et la question précédente,
$$\dim \operatorname{Im} A^\top.A = n - \dim \operatorname{Ker} A^\top.A = n - \dim \operatorname{Ker} A$$
et d'après le Théorème du supplémentaire orthogonal,
$$\dim(\operatorname{Ker} A)^\perp = n - \dim \operatorname{Ker} A,$$
donc $\dim \operatorname{Im} A^\top.A = \dim(\operatorname{Ker} A)^\perp$.

L'inclusion entre sous-espaces et l'égalité des dimensions prouvent l'égalité des sous-espaces :
$$\operatorname{Im} A^\top.A = (\operatorname{Ker} A)^\perp.$$

❧ D'après la première question, en remplaçant A par $A^\top$,
$$\operatorname{Ker} A.A^\top = \operatorname{Ker} A^\top.$$

Si la colonne X appartient à $\operatorname{Ker} A^\top$ et si la colonne Y appartient à $\operatorname{Im} A$, alors il existe une colonne U telle que $Y = AU$ et
$$\langle\, Y \,|\, X \,\rangle = (AU)^\top.X = U^\top.(A^\top.X) = U^\top.0 = 0,$$
donc $\operatorname{Ker} A^\top \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Réciproquement, si la colonne Y est orthogonale à $\operatorname{Im} A$, alors
$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R}), \quad 0 = \langle\, A.X \,|\, Y \,\rangle = (A.X)^\top.Y = X^\top.A^\top.Y = \langle\, X \,|\, A^\top.Y \,\rangle,$$
ce qui prouve que $A^\top.Y = 0$ (ce vecteur est orthogonal à tous les vecteurs) et donc que $Y \in \operatorname{Ker} A^\top$.

✍ *Variante : si Y est orthogonale à $\operatorname{Im} A$, alors*
$$\|A^\top.Y\|^2 = (A^\top.Y)^\top.A^\top.Y = Y^\top.A.(A^\top.Y) = \langle\, Y \,|\, A(A^\top.Y) \,\rangle = 0$$
puisque $A(A^\top.Y) \in \operatorname{Im} A$. On en déduit que $A^\top.Y = 0$, c'est-à-dire $Y \in \operatorname{Ker} A^\top$.

On a démontré par double inclusion que
$$\operatorname{Ker} A.A^\top = \operatorname{Ker} A^\top = (\operatorname{Im} A)^\perp.$$

❧ Si la colonne Y appartient à $\operatorname{Im} A.A^\top$, alors il existe une colonne X telle que $Y = (A.A^\top).X = A.(A^\top.X) \in \operatorname{Im} A$. Ainsi,
$$\operatorname{Im} A.A^\top \subset \operatorname{Im} A.$$
D'après la question précédente,
$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im} A.A^\top &= n - \dim \operatorname{Ker} A.A^\top && \text{(Théorème du rang)}\\
&= n - \big(n - \dim \operatorname{Im} A\big) && \text{(dimension du supplémentaire orthogonal)}\\
&= \dim \operatorname{Im} A
\end{aligned}$$
donc
$$\operatorname{Im} A.A^\top = \operatorname{Im} A$$
(inclusion et égalité des dimensions).