1❧ S'il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g, alors les deux matrices $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ sont diagonales. Or deux matrices diagonales commutent, donc f et g commutent.

2❧ Réciproquement, on suppose que f et g commutent. Par conséquent, tout sous-espace propre $E_\lambda^f = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, I_E)$ de f est aussi un sous-espace stable par g. Il existe donc un endomorphisme $g_\lambda \in L(E_\lambda^f)$ induit par restriction au sous-espace propre E_λ^f.

Tout vecteur propre de g_λ appartient par construction au sous-espace propre E_λ^f et, par définition des vecteurs propres, distinct du vecteur nul. Il s'agit donc d'un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Comme g est auto-adjoint, tous les endomorphismes g_λ sont également auto-adjoints et, d'après le Théorème spectral, chaque sous-espace propre E_λ^f admet une base orthonormée $\mathscr{B}_\lambda$ constituée de vecteurs propres pour g_λ. Les vecteurs de $\mathscr{B}_\lambda$ sont des vecteurs propres de g (puisque g_λ est induit par restriction de g) et aussi de f (comme on vient de le voir).

Comme f est auto-adjoint, les sous-espaces propres de f définissent une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}} E_\lambda^f$$

et par conséquent, en concaténant les familles $\mathscr{B}_\lambda$, on obtient une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

Comme on l'a vu, les vecteurs de cette base $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres aussi bien pour f que pour g.