1❧ Comme la matrice A est symétrique, alors (Théorème spectral) il existe une matrice orthogonale Q_0 et une matrice diagonale D telles que

$$Q_0^{-1}.A.Q_0 = Q_0^\top.A.Q_0 = D.$$

Comme la matrice symétrique A est positive, ses valeurs propres sont positives : il existe des réels positifs $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$D = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n) = \left[\text{Diag}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})\right]^2.$$

En posant $\Delta = \text{Diag}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $Q = Q_0^\top$, on a bien

$$A = Q^\top.\Delta^2.Q.$$

Comme la matrice Δ est diagonale, elle est en particulier symétrique et

$$A = Q^\top.\Delta^\top.\Delta.Q = (\Delta.Q)^\top.(\Delta.Q) = P^\top.P$$

en posant $P = \Delta.Q$.

❧ Comme la matrice A est, par hypothèse, symétrique et positive, on sait qu'elle est définie positive si, et seulement si, elle est inversible.

Si $PX = 0$, alors $AX = P^\top.PX = 0$. Réciproquement, si $AX = 0$, alors

$$\|PX\|^2 = (PX)^\top.(PX) = X^\top.P^\top.PX = X^\top.AX = 0$$

et par conséquent $PX = 0$. Cela démontre que $\text{Ker}\, A = \text{Ker}\, P$ et en particulier que A est inversible si, et seulement si, P est inversible (noyau réduit à la colonne nulle).

Ainsi, la matrice P est inversible si, et seulement si, la matrice A est définie positive.

✍ *La question suivante va préciser ce résultat : parmi toutes les matrices inversibles P possibles, il y en a au moins une qui soit triangulaire.*

2❧ Supposons que la matrice symétrique A soit définie positive. Alors l'application

$$\psi_A = \left[(X, Y) \mapsto X^\top.A.Y\right]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A est la matrice de Gram de ψ_A relative à la base canonique $\mathscr{C}_0 = (E_1, \dots, E_n)$:

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad A_{i,j} = E_i^\top.A.E_j = \psi_A(E_i, E_j).$$

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (U_1, \dots, U_n)$ pour ψ_A telle que la matrice de passage Q de la base canonique $\mathscr{C}_0$ à cette base $\mathscr{B}$ soit triangulaire (supérieure).

La matrice $P = Q^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique : ses colonnes $P_1, \dots, P_n$ expriment les vecteurs $E_1, \dots, E_n$ de la base canonique dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ et comme $\mathscr{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire ψ_A,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad A_{i,j} = \psi_A(E_i, E_j) = P_i^\top.P_j$$

c'est-à-dire

$$A = P^\top.P.$$

✍ *Si les matrices de Gram étaient au programme, on pourrait rapidement conclure en appliquant la formule de changement de base spécifiques aux matrices de Gram.*

3❧ Quel que soit l'automorphisme u de E, l'application φ définie par

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \varphi(x, y) = \big(u(x) \,\big|\, u(y)\big)$$

est clairement bilinéaire et symétrique. Par ailleurs,

$$\forall\, x \in E, \qquad \varphi(x, x) = \big\|u(x)\big\|^2 \geqslant 0$$

et si $\varphi(x,x) = 0$, alors $u(x) = 0_E$ et donc $x = 0_E$ (puisque u est supposée injective). Donc φ est bien un produit scalaire sur E.

❧ Réciproquement, supposons que φ soit un produit scalaire sur E. Considérons une base $\mathscr{C} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, orthonormée pour le produit scalaire de référence $(\cdot|\cdot)$, et la matrice

$$A = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

La matrice A est symétrique (par symétrie du produit scalaire) et définie positive : quelle que soit la colonne $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top.A.X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{i,j} x_j = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j\Big) = \Big\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \Big\|^2 \geqslant 0,$$

cette quantité étant nulle si, et seulement si, le vecteur

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i$$

est le vecteur nul, c'est-à-dire $x_1 = \cdots = x_n = 0$ (puisque les vecteurs e_i sont linéairement indépendants).

D'après les questions précédentes, il existe une matrice inversible P telle que $A = P^\top.P$. Notons u, l'automorphisme de E représenté par cette matrice inversible dans la base $\mathscr{C}$. Par linéarité de u et par bilinéarité du produit scalaire de référence $(\cdot|\cdot)$, l'application

$$\psi_u = \big[(x,y) \mapsto \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big)\big]$$

est, de même que φ, une forme bilinéaire sur E.

Par définition, les colonnes P_1, ..., P_n de la matrice P représentent les vecteurs $u(e_1)$, ..., $u(e_n)$ dans la base $\mathscr{C}$. Comme la base $\mathscr{C}$ est orthonormée pour le produit scalaire de référence $(\cdot|\cdot)$,

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \big(u(e_i)\,\big|\,u(e_j)\big) = P_i^\top.P_j = A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j).$$

Comme les deux formes bilinéaires φ et ψ_u coïncident sur une base de E, on en déduit qu'elles sont égales sur E :

$$\forall\,(x,y) \in E, \quad \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big) = \varphi(x,y).$$

✍ *De même que toute forme linéaire sur un espace euclidien E peut s'exprimer à l'aide du produit scalaire considéré (Théorème de représentation de Riesz) :*

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = (\,a\,|\,x\,),$$

tout produit scalaire sur E peut s'exprimer à l'aide du produit scalaire de référence :

$$\forall\, x,y \in E, \qquad \varphi(x,y) = \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big).$$