Soient E*, un espace euclidien de dimension* n *et* $u \in \mathcal{S}^+(E)$*.*
1❧ *On suppose qu'il existe un endomorphisme* $v \in \mathcal{S}^+(E)$ *tel que* $v^2 = u$*. Pour toute valeur propre* λ *de* u*,*

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda I) = \operatorname{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\, I),$$

ce qui prouve l'unicité d'un tel endomorphisme v*.*
2❧ *Il existe un, et un seul, endomorphisme* $v \in \mathcal{S}^+(E)$ *tel que* $v^2 = u$*.*
3❧ *Il existe plusieurs endomorphismes* $w \in \mathcal{S}(E)$ *tels que* $w^2 = u$*. Plus précisément, si les sous-espaces propres de* u *sont des droites, alors il existe* 2^n *endomorphismes* $w \in \mathcal{S}(E)$ *tels que* $w^2 = u$*; sinon, il en existe une infinité.*

1❧ Si $v^2 = u$, alors

$$u \circ v = v^2 \circ v = v \circ v^2 = v \circ u$$

et comme les deux endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

❧ Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. Comme l'endomorphisme auto-adjoint u est positif, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$, donc le réel λ est positif et $\sqrt{\lambda}$ est bien définie.

Supposons que $x \in \operatorname{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\, I)$. Alors $v(x) = \sqrt{\lambda} \cdot x$ et, par hypothèse,

$$u(x) = v^2(x) = (\sqrt{\lambda})^2 \cdot x = \lambda \cdot x.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\, I) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda I).$$

❧ Réciproquement, le sous-espace propre $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$ de u est stable par v, donc il existe un endomorphisme $v_\lambda \in L(E_\lambda)$ induit par restriction de v.

Comme v est auto-adjoint, alors v_λ est aussi auto-adjoint et donc diagonalisable (Théorème spectral). Pour tout $x \in E_\lambda$, on a

$$v_\lambda^2(x) = v^2(x) = u(x) = \lambda \cdot x$$

donc $X^2 - \lambda$ est un polynôme annulateur de v_λ et comme λ est un réel positif, le spectre de v_λ est contenu dans $\{\pm\sqrt{\lambda}\}$.

Mais on a supposé que v était auto-adjoint positif, donc v_λ est aussi auto-adjoint positif :

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad \big(x \,\big|\, v_\lambda(x)\big) = \big(x \,\big|\, v(x)\big) \geqslant 0$$

donc le spectre de v_λ est contenu dans $\{+\sqrt{\lambda}\}$. Or v_λ est diagonalisable, donc son spectre n'est pas vide : son spectre est donc égal à $\{\sqrt{\lambda}\}$.

Un endomorphisme diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie, donc

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad v(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} \cdot x$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda I) \subset \operatorname{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\, I).$$

On a ainsi démontré par double inclusion que

$$\forall\, \lambda \in \operatorname{Sp}(u), \qquad \operatorname{Ker}(u - \lambda I) = \operatorname{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\, I).$$

❧ Comme l'endomorphisme u est auto-adjoint, il est diagonalisable et

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)}} \operatorname{Ker}(u - \lambda I).$$

Si $v \in \mathcal{S}^+(E)$ vérifie $v^2 = u$, alors on vient de voir que

$$\forall\, \lambda \in \operatorname{Sp}(u),\ \forall\, x \in \operatorname{Ker}(u - \lambda I), \quad v(x) = \sqrt{\lambda} \cdot x.$$

D'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires (version caractérisation par une décomposition de E en somme directe **[1.87]**), il existe donc au plus un endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.

✍ *Pour justifier l'existence d'une racine carrée positive de* u, *nous allons reprendre certains des arguments précédents dans un ordre différent et surtout* dans un contexte différent *: on ne va pas commencer par supposer qu'un tel endomorphisme existe — et ça change tout !*

$\boxed{2❧}$ Comme u est un endomorphisme auto-adjoint positif, il existe une base orthonormée de E

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres de u et le spectre de u est contenu dans $\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \exists\, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad u(\varepsilon_k) = \lambda_k \cdot \varepsilon_k.$$

Comme les réels λ_k sont positifs, on déduit du Théorème de caractérisation des applications linéaires (via une base de l'espace de départ **[1.11]**) qu'il existe un endomorphisme v de E tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad v(\varepsilon_k) = \sqrt{\lambda_k} \cdot \varepsilon_k.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour v, cet endomorphisme est auto-adjoint et comme ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_k}$ sont toutes positives, c'est un endomorphisme auto-adjoint positif : $v \in \mathcal{S}^+(E)$.

En outre,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad v^2(\varepsilon_k) = (\sqrt{\lambda_k})^2 \cdot \varepsilon_k = \lambda_k \cdot \varepsilon_k = u(\varepsilon_k).$$

Comme u et v^2 sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base de E, ils sont en fait égaux :

$$\forall\, x \in E, \quad v^2(x) = u(x)$$

et on a ainsi démontré qu'il existait une (et une seule !) racine carrée positive de u.

$\boxed{3❧}$ Si on n'impose pas $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$, alors tout endomorphisme w tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad w(\varepsilon_k) = \pm\sqrt{\lambda_k} \cdot \varepsilon_k$$

est un endomorphisme auto-adjoint tel que $w^2 = u$. Il y a donc au moins 2^n endomorphismes auto-adjoints possibles !

❧ En reprenant l'analyse menée plus haut, si les sous-espaces propres de E sont tous des droites, il n'y a que 2^n possibilités : pour toute valeur propre λ de u, il existe un vecteur x_λ non nul tel que

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda I) = \mathbb{R} \cdot x_\lambda$$

et comme $v(x_\lambda) = \pm\sqrt{\lambda} \cdot x_\lambda$,

— ou bien
$$\forall\, x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda I), \quad v(x) = +\sqrt{\lambda} \cdot x,$$

— ou bien
$$\forall\, x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda I), \quad v(x) = -\sqrt{\lambda} \cdot x$$

❧ En revanche, s'il existe un sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \lambda I)$ de dimension supérieure à 2, alors ce sous-espace contient une infinité de familles orthonormées (a_λ, b_λ) et pour chacune de ces familles, il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$v(a_\lambda) = +\sqrt{\lambda} \cdot a_\lambda \quad \text{et} \quad v(b_\lambda) = -\sqrt{\lambda} \cdot b_\lambda.$$

Il existe dans ce cas une infinité de racines carrées pour u.

✍ *Du moment qu'on assure l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres, on peut faire tout ce qu'on veut, on obtiendra un endomorphisme auto-adjoint !*

✍ *Ceux qui ont besoin de* voir *pour croire gagneront à se rappeler la forme générale des matrices de réflexion en dimension 2 et vérifieront que*

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta & \alpha\sin\theta & & & \\ \alpha\sin\theta & -\alpha\cos\theta & & & \\ & & \alpha_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & & & \\ 0 & \alpha^2 & & & \\ & & \alpha_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

pour croire *enfin !*