La matrice $A^\top.A$ est symétrique réelle :

$$(A^\top.A)^\top = A^\top.(A^\top)^\top = A^\top.A$$

donc elle est diagonalisable.

Si les matrices A et $A^\top$ commutent, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad (A^\top.A)^k = (A^\top)^k.A^k$$

et comme A est nilpotente, il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^d = 0_n$. Par conséquent, la matrice $A^\top.A$ est nilpotente :

$$(A^\top.A)^d = (A^\top)^d.A^d = (A^\top)^d.0_n = 0_n$$

et son unique valeur propre est donc 0.

Une matrice diagonalisable dont l'unique valeur propre est nulle est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle :

$$A^\top.A = 0_n.$$

Par conséquent, pour toute colonne X,

$$\|AX\|^2 = AX^\top.AX = X^\top.A^\top.A.X = 0$$

et donc

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad AX = 0,$$

ce qui prouve que la matrice A elle aussi est nulle.