Comme l'endomorphisme u est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E et une matrice diagonale Δ telles que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \Delta = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Comme p est un entier *impair*, les réels $\delta_k = d_k^{1/p}$ sont bien définis et il existe un endomorphisme v_0 de E tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(v_0) = \mathrm{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n).$$

Cet endomorphisme v_0 est auto-adjoint (il est représenté par une matrice symétrique [elle est diagonale !] dans une base orthonormée) et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(v_0^p) = \mathrm{Diag}(\delta_1^p, \dots, \delta_n^p) = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u),$$

donc $v_0^p = u$.

✍ *Bien sûr, il n'existe qu'un seul endomorphisme dont la matrice relative à la base $\mathscr{B}_0$ soit égale à $\mathrm{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Mais cela ne prouve pas qu'il n'existe qu'une seule solution $v \in \mathcal{S}(E)$ au problème posé : il faudrait être sûr que toutes les solutions possibles à ce problème soient représentées par cette matrice dans cette base.*

C'est l'objet de la réciproque.

❧ Réciproquement, s'il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$, alors u et v commutent :

$$u \circ v = v^p \circ v = v^{p+1} = v^p \circ v = u \circ v$$

donc chaque sous-espace propre de u est stable par v.

Comme u est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles et u est diagonalisable (Théorème spectral) :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda I).$$

Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de u et notons $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda I)$, le sous-espace propre associé à λ. Comme E_λ est stable par v, on peut définir l'endomorphisme $v_\lambda \in L(E_\lambda)$ induit par restriction de v à ce sous-espace propre. Comme v est auto-adjoint, l'endomorphisme induit v_λ est aussi auto-adjoint :

$$v_\lambda \in \mathcal{S}(E_\lambda)$$

et donc diagonalisable (Théorème spectral, bis). En particulier, son polynôme minimal est scindé à racines simples (réelles ! puisqu'on travaille dans un espace euclidien) et, par définition, divise tous les polynômes annulateurs de v_λ. Mais

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad v_\lambda^p(x) = v^p(x) = u(x) = \lambda \cdot x$$

donc $X^p - \lambda$ est un polynôme annulateur de v_λ.

Comme l'exposant p est impair, ce polynôme n'admet qu'une seule racine réelle : $\lambda^{1/p}$ et par conséquent, il n'admet qu'un seul diviseur unitaire, non constant et scindé à racines simples (réelles ! vous dis-je) : le polynôme minimal de v_λ est égal à $X - \lambda^{1/p}$. Autrement dit, v_λ est une homothétie :

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad v(x) = v_\lambda(x) = \lambda^{1/p} \cdot x.$$

D'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires (version décomposition en somme directe **[1.87]**), il existe donc au plus un endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

❧ Il existe donc un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.