L'endomorphisme $u^* \circ u$ est auto-adjoint car

$$(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u.$$

D'après le Théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E constituée de vecteurs propres pour $u^* \circ u$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad (u^* \circ u)(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$$

et comme les e_k sont deux à deux orthogonaux :

$$\begin{aligned} \forall\, i \neq j, \quad \big(u(e_i) \,\big|\, u(e_j)\big) &= \big((u^* \circ u)(e_i) \,\big|\, e_j\big) \qquad \text{(définition de l'adjoint)} \\ &= \lambda_i \,(\, e_i \,|\, e_j \,) = 0. \end{aligned}$$

✍ *C'est ainsi que, pour tout endomorphisme u d'un espace euclidien, il existe une base orthonormée dont l'image est une famille orthogonale (attention, cette famille peut contenir le vecteur nul, elle engendre $\operatorname{Im} u$ mais ce n'est pas forcément une base de E).*