❧ Comme X est un vecteur propre unitaire de A associé à λ, on a

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X^\top.X = 1.$$

D'autre part, $X^\top.A = (A^\top.X)^\top = (AX)^\top$ puisque A est symétrique. On en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(A - u.X.X^\top)^2 &= A^2 - u.X.X^\top.A - u.A.X.X^\top + u^2.X.X^\top.X.X^\top \\ &= A^2 - 2u\lambda.X.X^\top + u^2.X.X^\top.\end{aligned}$$

Comme X est un vecteur unitaire, la matrice carrée $X.X^\top$ est la projection orthogonale sur la droite dirigée par X et sa trace est donc égale à 1.

✍ *On rappelle que la projection orthogonale p sur la droite $D = \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ (où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire) s'exprime*

$$\forall\, \mathbf{x} \in E, \quad p(\mathbf{x}) = (\,\mathbf{u} \,|\, \mathbf{x}\,) \cdot \mathbf{u}.$$

Dans une base orthonormée, cette expression se traduit matriciellement par

$$(U^\top.X).U = U.(U^\top.X) = (U.U^\top).X.$$

On rappelle également que, pour toute projection, la trace est égale au rang. On projette ici sur une droite, donc le rang est égal à 1.

Ainsi,

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \text{tr}(A - u \cdot X.X^\top)^2 = \text{tr}(A^2) - 2u\lambda + u^2.$$

Il s'agit ici d'un trinôme du second degré en la variable u, il atteint son minimum en $u = (2\lambda/2) = \lambda$ et ce minimum est égal à

$$F_A(X) = \text{tr}(A^2) - \lambda^2.$$

✍ *L'expression dépend de X, car λ est la valeur propre associée à X !*

Lorsque X parcourt W, la valeur propre λ parcourt $\text{Sp}(A)$, donc

$$m(A) = \min_{X \in W} F_A(X) = \min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} [\text{tr}(A^2) - \lambda^2] = \text{tr}(A^2) - \rho(A)^2.$$

Comme A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice de la forme

$$\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$$

et par conséquent, A^2 est semblable à $\text{Diag}(a_1^2, \dots, a_n^2)$. On en déduit que

$$\text{Sp}(A^2) = \{\lambda^2,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\},$$

puis que

$$\rho(A^2) = \big[\rho(A)\big]^2$$

et donc que

$$m(A) = \text{tr}(A^2) - \rho(A^2).$$