✍ *On ne vérifie pas qu'il s'agit bien d'un produit scalaire, mais il faut savoir le faire sans hésiter.*

❧ Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$(X^i \mid X^j) = \int_0^1 t^{i+j}\,dt = \frac{1}{i+j+1}.$$

❧ Comme toutes les matrices de Gram, la matrice H est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

❧ Soit $U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, la colonne canoniquement associée à $(a_0, \dots, a_n)$. Alors

$$\begin{aligned} U^\top.H.U &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i H_{i,j} a_j \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \right) \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right)^2 dt. \end{aligned}$$

❧ Par positivité de l'intégrale, on a donc montré que la matrice symétrique H était positive :

$$\forall\, U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \quad U^\top.H.U \geqslant 0.$$

De plus, si $U^\top.H.U = 0$, alors

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\|^2 = 0$$

donc le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

est le polynôme nul et par conséquent

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad a_i = 0$$

c'est-à-dire $U = 0$. Donc $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et d'après la caractérisation spectrale des matrices définies positives, ses valeurs propres sont toutes strictement positives.