❧ Il est clair que l'application φ est une forme bilinéaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme la matrice A est symétrique et que $X^\top.A.Y \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) &= X^\top.A.Y = (X^\top.A.Y)^\top = Y^\top.A^\top.X = Y^\top.A.X\\ &= \varphi(Y,X).\end{aligned}$$

De plus, comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, quelle que soit la colonne X non nulle,

$$\varphi(X,X) = X^\top.A.X > 0,$$

ce qui prouve que φ est définie positive. Ainsi, φ est bien un produit scalaire.

✍ *Avant d'aller plus loin, rappelons que la matrice A est bien inversible (en tant que matrice symétrique **définie** positive) et que son inverse est symétrique elle aussi :*

$$A^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

❧ Considérons maintenant l'endomorphisme T défini par

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad T(X) = (A^{-1}B).X$$

et calculons son adjoint pour le produit scalaire φ : quelles que soient les colonnes X et Y,

$$\begin{aligned}\varphi\big(T(X),Y\big) &= [(A^{-1}B).X]^\top.A.Y\\ &= X^\top.B^\top.(A^{-1})^\top.A.Y = X^\top.B.A^{-1}.A.Y \quad (\text{car } A^{-1},\ B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))\\ &= X^\top.B.Y = X^\top.A.(A^{-1}B.Y) = \varphi\big(X,T(Y)\big).\end{aligned}$$

L'endomorphisme T est donc auto-adjoint pour le produit scalaire φ.

❧ L'endomorphisme T est donc diagonalisable (Théorème spectral) et par conséquent, la matrice $(A^{-1}B)$ (qui représente l'endomorphisme T dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R})$) est diagonalisable.

✍ *Rien ne prouve que la matrice $A^{-1}B$ soit symétrique ! En effet, cette matrice représente l'endomorphisme auto-adjoint T dans la base canonique et rien ne doit laisser penser que cette base soit une base orthonormée pour le produit scalaire φ.*