✍ *Rappelons que les produits scalaires canoniques sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont respectivement définis par*

$$(X \mid Y) = X^\top.Y \quad \textit{et par} \quad \langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top.B).$$

1❧ La matrice

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique réelle, donc (Théorème spectral) il existe une base orthonormée $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour K_n :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad K_n U_k = \lambda_k U_k.$$

2❧ Il est clair que T est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Nous allons prouver qu'il est auto-adjoint (pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

Quelles que soient les matrices A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle T(A) \mid B \rangle &= \operatorname{tr}\big((K_n.A + A.K_n + A)^\top.B\big) \\ &= \operatorname{tr}(A^\top.K_n^\top.B + K_n^\top.A^\top.B + A^\top.B) \\ &= \langle A \mid (K_n.B) \rangle + \operatorname{tr}(A^\top.B.K_n) + \langle A \mid B \rangle \\ &= \langle A \mid (K_n.B + B.K_n + B) \rangle = \langle A \mid T(B) \rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé la symétrie de K_n (c'est-à-dire $K_n^\top = K_n$) et la propriété bien connue de la trace.

✍ *Rappelons au passage que la propriété*

$$\forall\, M, N, \qquad \operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$$

est vraie non seulement lorsque M et N sont des matrices carrées de même taille, mais plus généralement lorsque M et N sont des matrices rectangulaires de tailles compatibles, c'est-à-dire quelles que soient les matrices $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Ainsi, même si les matrices $MN \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $NM \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ sont de formats différents, elles ont toujours la même trace.

❧ D'après le Théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour T. Nous allons vérifier qu'il en existe une qui est particulièrement simple.

3❧ Par hypothèse, $(U_i \mid U_j) = U_i^\top.U_j = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Quels que soient les indices $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \langle V_{i,j} \mid V_{k,\ell} \rangle &= \operatorname{tr}\big((U_i.U_j^\top)^\top.(U_k.U_\ell^\top)\big) \\ &= \operatorname{tr}(U_j.(U_i^\top.U_k).U_\ell^\top) \\ &= \operatorname{tr}(U_j.(U_i \mid U_k).U_\ell^\top) \\ &= \delta_{i,k}\operatorname{tr}(U_j.U_\ell^\top) = \delta_{i,k}\operatorname{tr}(U_\ell^\top.U_j) \qquad (\star) \\ &= \delta_{i,k}(U_\ell \mid U_j) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell} \end{aligned}$$

en appliquant $(\star)$ la propriété bien connue de la trace et en remarquant par la même occasion que $U_\ell^\top.U_j \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, ce qui rend le calcul de la trace particulièrement simple !

On a ainsi démontré que $(V_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille orthonormée de n^2 vecteurs de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ Enfin, quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on sait que

$$K_n.U_i = \lambda_i.U_i$$

et que

$$U_j^\top . K_n = (K_n . U_j)^\top = \lambda_j . U_j^\top = \lambda_j . U_j^\top$$

(puisque la matrice K_n est symétrique). On en déduit que

$$\begin{aligned} T(V_{i,j}) &= K_n . U_i . U_j^\top + U_i . U_j^\top . K_n + V_{i,j} \\ &= \lambda_i . U_i . U_j^\top + U_i . (\lambda_j . U_j^\top) + V_{i,j} \\ &= (1 + \lambda_i + \lambda_j) . V_{i,j} \end{aligned}$$

donc les matrices $V_{i,j}$ (non nulles, puisque leur norme est égale à 1) sont des vecteurs propres de T.