✍ *On ne vérifie pas qu'il s'agit bien d'un produit scalaire, mais il faut savoir le faire sans hésiter.*

1❧ Quel que soit le polynôme P, il est clair que $f(P)$ est un polynôme. Il est clair également que f est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il nous reste à vérifier que le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

✍ *Ce serait une faute logique d'étudier $f(P)$ en supposant que le degré de P est* ***égal*** *à n, il faut étudier le degré de $f(P)$ en supposant que celui de P est* ***inférieur*** *à n.*
Nous ferons mieux en supposant que le degré de P est inférieur *à $k \neq n$.*

Si $\deg P \leqslant k \leqslant n$, alors $\deg P' \leqslant k-1$ et $\deg P'' \leqslant k-2$, donc

$$\deg(X^2-1)P'' \leqslant k \quad \text{et} \quad \deg XP' \leqslant k,$$

si bien que $\deg f(P) \leqslant k$. Chaque sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ est donc stable par f : en particulier, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice triangulaire supérieure, ce qui va nous donner immédiatement le spectre de f.

❧ L'endomorphisme f est auto-adjoint : quels que soient les polynômes P et Q,

$$\begin{aligned}
\langle f(P) \,|\, Q \rangle &= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{1}{2}(t^2-1)P''(t) + tP'(t)\Big] Q(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{1}{2}(t^2-1)P'(t)\Big]' Q(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle \\
&= \Big[\frac{1}{2}(t^2-1)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle.
\end{aligned}$$

L'expression trouvée est symétrique en P et Q, donc $\langle f(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, f(Q) \rangle$ et l'endomorphisme f est bien auto-adjoint.

✍ *Dans ce genre de situation, l'intégration par parties est le* ***seul*** *moyen de rendre l'intégrale symétrique en P et Q : on fait disparaître la dérivée seconde de P en faisant apparaître la dérivée première de Q.*

✍ *Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint et que sa matrice relative à la base canonique n'est pas symétrique, la base canonique n'est pas une base orthonormée pour le produit scalaire considéré.*

❧ Il est clair que $f(1) = -1$; $f(X) = 0$ et que

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad f(X^k) = \frac{k^2+k-2}{2}X^k - \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2}.$$

La matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ étant triangulaire (supérieure), les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de cette matrice :

$$\mathrm{Sp}(f) = \Big\{\frac{k^2+k-2}{2},\ 0 \leqslant k \leqslant n\Big\}.$$

Le trinôme t^2+t-2 atteint son minimum en $t = -1/2$ (sommet de la parabole en $-b/(2a)$), donc la fonction $\big[t \mapsto t^2+t-2\big]$ est strictement croissante sur $[-1/2, +\infty[$ et en particulier, les valeurs propres

$$\lambda_k = \frac{k^2+k-2}{2}$$

sont deux à deux distinctes.

✍ *On a ainsi démontré deux fois que f était diagonalisable : en tant qu'endomorphisme auto-adjoint (Théorème spectral) et en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension $(n+1)$ qui possède $(n+1)$ valeurs propres distinctes.*
Chaque argument permet de préciser l'autre ! En effet,

— *la seconde propriété montre que chaque sous-espace propre est une droite vectorielle : deux vecteurs propres associés à une même valeur propre sont donc proportionnels ;*

— *le Théorème spectral prouve alors que ces droites sont deux à deux orthogonales !*

Ainsi, n'importe quelle base de vecteurs propres de f est une base orthogonale (non nécessairement orthonormée).

❧ Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe donc un vecteur propre P_k associé à la valeur propre λ_k. Comme tous les vecteurs propres associés à λ_k sont proportionnels (et non nuls...), ils ont tous le même degré. Mais lequel ?

Chaque sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ étant stable par f, on peut définir les endomorphismes f_k induits par restriction de f aux sous-espaces $\mathbb{R}_k[X]$ et la matrice relative à la base canonique nous montre que λ_k appartient au spectre de f_k mais pas au spectre de f_{k-1}. Par conséquent, il existe un vecteur propre de f associé à λ_k dans $\mathbb{R}_k[X]$ (son degré est inférieur à k) mais pas dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ (donc son degré est strictement supérieur à $(k-1)$). Donc le degré de tous les vecteurs propres associés à λ_k est égal à k.

✍ *Toute base de vecteurs propres est donc échelonnée en degré et il suffit de connaître le degré d'un vecteur propre pour connaître la valeur propre qui lui est associée !*

$\boxed{2❧}$ D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, $(T_0, \dots, T_k)$ est une base orthonormée de

$$\operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X],$$

donc (décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée)

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_k[X], \quad Q = \sum_{i=0}^{k} \langle\, Q \,|\, T_i \,\rangle \cdot T_i.$$

Comme $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par f, alors $f(T_k) \in \mathbb{R}_k[X]$ et

$$\begin{aligned} f(T_k) &= \sum_{i=0}^{k} \langle\, f(T_k) \,|\, T_i \,\rangle \cdot T_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \langle\, T_k \,|\, f(T_i) \,\rangle \cdot T_i. && (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_n[X])) \end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant i < k$, le polynôme T_i appartient à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ et comme $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est stable par f,

$$f(T_i) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \operatorname{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_{k-1}) \perp T_k$$

(puisque la famille $(T_0, T_1, \dots, T_{k-1}, T_k)$ est orthogonale. Donc

$$\forall\, 0 \leqslant i < k, \qquad \langle\, T_k \,|\, f(T_i) \,\rangle = 0$$

et il ne reste plus que

$$f(T_k) = \langle\, f(T_k) \,|\, T_k \,\rangle \cdot T_k.$$

Comme T_k n'est pas nul (vecteur unitaire !), c'est un vecteur propre de f, (associé à la valeur propre $\langle\, f(T_k) \,|\, T_k \,\rangle$).

Comme $\deg T_k = k = \deg P_k$, on déduit de la question précédente que T_k et P_k sont associés à la même valeur propre et donc proportionnels entre eux.