1❧ D'après le Théorème spectral, toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables. Il existe donc un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

2❧ Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, le spectre d'une matrice triangulaire *stricte* est réduit à $\{0\}$ (tous les coefficients diagonaux sont nuls). Si une telle matrice est diagonalisable, alors elle est semblable à la matrice nulle (= la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls) et donc *égale* à la matrice nulle.

✍ *Pour mémoire :* $A = P0_nP^{-1} = 0_n$.

L'ensemble U^+ des matrices triangulaires supérieures strictes est un espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$ et la seule matrice diagonalisable de ce sous-espace est la matrice nulle.

3❧ Soit V, un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables. D'après la question précédente, l'intersection $V \cap U^+$ est réduite à la matrice nulle : $V \cap U^+ = \{0_n\}$, ce qui prouve que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. On en déduit que

$$\dim V + \dim U^+ \leqslant \dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$$

et donc que

$$\dim V \leqslant \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est maximal parmi les sous-espaces de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

✍ ***Précision à titre culturel***

*Dans un ensemble ordonné $(E, \prec)$, un élément a est dit **maximal** lorsqu'il n'existe aucun élément strictement supérieur à lui :*

$$\forall\, x \in E, \qquad a \prec x \implies x = a.$$

*Si $\prec$ est une relation d'ordre total (comme $\leqslant$), la notion d'*élément maximal *coïncide avec celle de* plus grand élément.

En revanche, pour une relation d'ordre partiel (comme $\subset$ ou $|$), ces notions diffèrent. Notamment, il peut exister plusieurs éléments maximaux alors qu'il existe au plus un plus grand élément (et s'il existe un plus grand élément, alors c'est le seul élément maximal).

Exemple : si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ est ordonné par $|$, alors les éléments maximaux de E sont 6, 7, 8, 9 et 10.

Variante : si E est l'ensemble des entiers naturels supérieurs à 2 (pour $\leqslant$), alors les éléments minimaux de E pour $|$ sont les entiers premiers (pas de diviseur strict dans E) et l'ensemble E n'a pas de plus petit élément.

En revanche, si $E = \mathbb{N}^*$ est ordonné par $|$, l'entier 1 est le seul élément minimal — et c'est donc le plus petit élément de E.