1❧ Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée pour le produit scalaire φ_0. Par définition,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$$

donc la matrice de Gram $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_0)$ est égale à I_n.

Par définition, la matrice de Gram relative à la base $\mathscr{B}_0$ de l'autre produit scalaire φ

$$\Gamma = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi) = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est une matrice symétrique réelle :

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, quelle que soit la colonne $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$$\begin{aligned} X^\top.\Gamma.X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \Gamma_{i,j} x_j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \varphi(e_i, e_j) x_j \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \varphi(x, x) \end{aligned}$$

et comme φ est un produit scalaire, $X^\top.\Gamma.X$ est un réel positif, qui est nul si, et seulement si, la colonne X est la colonne nulle. Donc la matrice symétrique Γ est bien définie positive : $\Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2❧ Comme la matrice Γ est symétrique réelle, on déduit du Théorème spectral qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale Δ telles que

$$Q^\top.\Gamma.Q = Q^{-1}.\Gamma.Q = \Delta = \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n).$$

✍ *De plus, les coefficients diagonaux de Δ sont les valeurs propres de Γ et comme Γ est définie positive, ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.*

3❧ En tant que matrice inversible, la matrice Q est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à une nouvelle base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).$$

✍ *Une matrice est orthogonale si, et seulement si, c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée (changement de base orthonormée).*

❧ Comme la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale et que la base $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée pour φ_0, la base $\mathscr{B}$ est aussi une base orthonormée pour φ_0. Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0) = I_n.$$

✍ *La matrice de Gram d'un produit scalaire ψ relative à une base $\mathscr{B}$ sert à calculer (matriciellement) le produit scalaire $\psi(x, y)$ au moyen des coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$ des vecteurs x et y :*

$$\psi(x, y) = X^\top.\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi).Y.$$

❧ Par définition de la base $\mathscr{B}$, les colonnes Q_1, ..., Q_n de la matrice de passage Q représentent les vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de la base $\mathscr{B}$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}_0$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad Q_i^\top.\Gamma.Q_j = \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

On en déduit que

$$\big(\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = Q^\top.\Gamma.Q = \Delta.$$

✍ *La formule de changement de base pour les matrices de Gram (hors programme, mais déjà vue en* **[66.4]***) nous assure que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi) = Q^{\top}.\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\psi).Q$$

pour toute forme bilinéaire ψ *et toute matrice de passage* $Q = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B})$ *(que cette matrice* Q *soit orthogonale ou non).*

Comme la matrice Δ est diagonale, on en déduit en particulier que

$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \qquad \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

La nouvelle base $\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est donc orthonormée pour le produit scalaire de référence φ_0 et orthogonale pour l'autre produit scalaire φ.

✍ *S'il existe une base qui est orthonormée à la fois pour le produit scalaire* φ_0 *et pour le produit scalaire* φ*, alors en fait ces deux produits scalaires n'en font qu'un !*

En effet, si $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0)$*, alors*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = X^{\top}.A.Y = \varphi_0(x, y)$$

où les colonnes X *et* Y *représentent les vecteurs* x *et* y *dans la base* $\mathscr{B}$*.*

(On suppose ici seulement que les deux produits scalaires ont une même matrice de Gram dans une base $\mathscr{B}$ *donnée, on ne suppose même pas que la matrice de Gram* A *est égale à* I_n*.)*