1❧ Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^\top.S.Q$ soit diagonale et les valeurs propres de S sont strictement positives. Il existe donc des réels $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs tels que
$$Q^\top.S.Q = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)^2$$
c'est-à-dire
$$S = [Q.\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)].[\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)^\top.Q^\top] = P.P^\top$$
en posant $P = Q.\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$, qui est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles.

❧ Réciproquement, si P est inversible, alors la matrice $S = P.P^\top$ est symétrique :
$$S^\top = (P.P^\top)^\top = (P^\top)^\top.P^\top = P.P^\top = S$$
et pour toute colonne X,
$$X^\top.S.X = (P.X)^\top.(P.X) = \|PX\|^2 \geqslant 0.$$
En outre, si $X^\top.S.X = 0$, alors $\|PX\| = 0$, donc $PX = 0$ et comme la matrice P est inversible, alors $X = 0$.

Ainsi, la matrice $P.P^\top$ est symétrique définie positive, quelle que soit la matrice inversible P.

2❧ D'après la question précédente,
$$S.T = P.P^\top.T = P.P^\top.T.(P.P^{-1}) = P.(P^\top.T.P).P^{-1}$$
donc S.T est semblable à la matrice $P^\top.T.P$, qui est une matrice symétrique réelle :
$$(P^\top.T.P)^\top = P^\top.T^\top.(P^\top)^\top = P^\top.T.P$$
puisque $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après le Théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. Comme S.T est semblable à une matrice diagonalisable, elle est elle-même diagonalisable.

✍ *À moins que S et T ne commutent, la matrice S.T n'est pas symétrique ! Les matrices symétriques réelles ne sont pas les seules matrices diagonalisables...*

3❧ Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ telles que
$$A = Q.\Delta.Q^{-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta = Q^{-1}.A.Q.$$
Par conséquent, comme Δ est symétrique (elle est diagonale !),
$$A^\top = (Q.\Delta.Q^{-1})^\top = (Q^{-1})^\top.\Delta.Q^\top = (Q^{-1})^\top.(Q^{-1}.A.Q).Q^\top.$$
En posant $S = Q.Q^\top$, on définit une matrice symétrique définie positive, dont l'inverse est égal à
$$(Q.Q^\top)^{-1} = (Q^\top)^{-1}.Q^{-1} = (Q^{-1})^\top.Q^{-1},$$
ce qui prouve que $A^\top = S^{-1}.A.S$.

✍ *Il faut savoir qu'une matrice Q est inversible si, et seulement si, sa transposée est inversible et que, le cas échéant,*
$$(Q^\top)^{-1} = (Q^{-1})^\top$$
puisque
$$Q^\top.(Q^{-1})^\top = (Q^{-1}.Q)^\top = I_n = (Q.Q^{-1})^\top = (Q^{-1})^\top.Q^\top.$$
On ne doit pas perdre de temps à vérifier cette propriété à chaque fois qu'on doit s'en servir !

❧ Réciproquement, s'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1}.A.S,$$

alors il existe une matrice inversible P telle que $S = P.P^\top$ et

$$A^\top = (P.P^\top)^{-1}.A.(P.P^\top) = (P^\top)^{-1}.(P^{-1}.A.P).P^\top,$$

donc

$$P^{-1}.A.P = P^\top.A^\top.(P^\top)^{-1} = (P^{-1}.A.P)^\top.$$

Cela prouve que la matrice $P^{-1}.A.P$ est symétrique réelle. D'après le Théorème spectral, cette matrice est semblable à une matrice diagonale et par transitivité, la matrice A est elle aussi semblable à une matrice diagonale.

✍ *On a ainsi caractérisé les matrices diagonalisables : la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = S^{-1}.A.S$.*

Cela dit, ce critère ne me paraît pas d'une utilité pratique particulière !