Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2022/2023

MP

Composition de Mathématiques

Le 1er mars 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Extraits des rapports du jury

Les candidats doivent prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise.

Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de **citer** et de vérifier soigneusement **toutes ses hypothèses**. ❏

De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

Pour utiliser la formule des probabilités totales, il est nécessaire de **citer le système complet d'évènements** utilisé. ❏

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer **en citant le numéro** de la question. ❏

Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indisposerait **fortement** le correcteur. ❏

Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie **à quel moment cette hypothèse est utile**. ❏

Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.

Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles **même** si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente. ❏

Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre. ❏

❖ I – Problème ❖

Dans ce problème, on note E, un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. La norme qui apparaît est la norme associée à ce produit scalaire :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

*On dira qu'un endomorphisme u de E est une **similitude** lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|.$$

*Le réel k est le **rapport** de la similitude.*
L'ensemble des similitudes de E sera noté $\mathrm{Sim}(E)$.
L'objectif de ce problème est de caractériser les similitudes de l'espace E.

Partie A. Premières propriétés

1. Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$.

1. a. Expliquer pourquoi le rapport de la similitude u est bien défini.

1. b. Démontrer que l'application linéaire u est continue et que $|||u|||$ est égale au rapport de la similitude.

2. *Dans cette question*, l'espace E est l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u \in L(E)$, l'endomorphisme représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a. Démontrer que u est une similitude. Préciser son rapport.

2. b. On considère les trois vecteurs

$$M = (2,1), \quad N = (4,1) \quad \text{et} \quad P = (4,2),$$

ainsi que les trois vecteurs

$$M' = u(M), \quad N' = u(N) \quad \text{et} \quad P' = u(P).$$

Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

3. Démontrer que toute similitude de E est un automorphisme de E et établir que $\mathrm{Sim}(E)$ est un groupe pour le produit de composition $\circ$.

4. Soient u, un endomorphisme de E ; $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E et A, la matrice de u relative à cette base orthonormée.

4. a. Démontrer que u est une isométrie si, et seulement si, $A^\top.A = I_n$.

4. b. On suppose que u est une similitude de rapport k. Que dire de la matrice A ?

5. *Dans cette question*, l'espace euclidien E est l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. a. Démontrer que l'endomorphisme u représenté par la matrice A dans la base canonique est une similitude dont on donnera le rapport. En déduire la matrice A^{-1}.

5. b. Vérifier que

$$\forall f \in O(E), \quad u^{-1} \circ f \circ u \in O(E).$$

*On rappelle que la **sphère unité** de E est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $\|x\| = 1$. Plus généralement, une partie X de E est une **sphère de centre** a si, et seulement si, il existe un réel $r > 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad x \in X \iff \|x - a\| = r.$$

6. Soit $u \in L(E)$. On suppose que l'image par u de la sphère unité de E est une sphère X de centre 0_E. Démontrer que u est une similitude de E.

Partie B. Caractérisations

7. Soit $u \in L(E)$. Démontrer que u est une similitude si, et seulement si, il existe une homothétie αI_E (avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$) et une isométrie f telles que

$$u = f \circ (\alpha I_E).$$

8. Factoriser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

comme produit d'une homothétie et d'une isométrie plane. Préciser la nature géométrique de cette isométrie.

9. Soit $u \in L(E)$.

9. a. Démontrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

9. b. En déduire que u est une similitude de rapport k si, et seulement si,

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle.$$

*On dit qu'un endomorphisme $u \in L(E)$ **conserve l'orthogonalité** lorsque*

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x | y \rangle = 0 \implies \langle u(x) | u(y) \rangle = 0.$$

10. Démontrer que toute similitude conserve l'orthogonalité.

11. Réciproquement, soit $u \in L(E)$, un automorphisme qui conserve l'orthogonalité. On considère une base orthonormée

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$$

de E.

11. a. Démontrer que

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0$$

puis que

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|.$$

11. b. En notant k, la valeur commune à tous les $\|u(e_i)\|$, démontrer que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \|u(e_i)\| = k\,\|e_i\|$$

puis que u est une similitude de rapport k.

❖ II – Problème ❖

Soit $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges et on procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant le protocole suivant :

- *si on a tiré une boule blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;*
- *si on a tiré une boule rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.*

L'objet de ce problème est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage, puis de calculer la loi du nombre (aléatoire) de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans le cas particulier $b = r = 1$.

Pour cela, on admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies des variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

- *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli et on interprète l'évènement $[X_n = 1]$ par le fait de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage ;*
- *on pose*
$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad S_0(\omega) = b$$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad S_n(\omega) = b + \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega).$$

On suppose que
$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{b+r}$$
et que, pour tout entier k tel que $\mathbf{P}(S_n = k) > 0$,
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}.$$

Partie A. Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1. Expliquer le modèle choisi.

2. Démontrer que la variable S_n est égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne au moment de procéder au n-ième tirage. Quelles sont les valeurs possibles pour la variable aléatoire S_n ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $[X_1 = 1]$. En déduire la loi de X_2.

Partie B. Loi de X_n

On admet *que*
$$\forall\, k \in [\![b, b+n]\!], \quad \mathbf{P}(S_n = k) > 0.$$

4. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbf{E}(S_n)}{b+r+n}.$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le paramètre de la variable aléatoire X_n est égal à
$$p = \frac{b}{b+r}.$$

Partie C. Loi de S_n

On suppose ici que $b = r = 1$.

6. Exprimer l'évènement $[S_n = 1]$ à l'aide des évènements $[X_k = 0]$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

7. Démontrer que
$$\mathbf{P}(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}.$$

8. Démontrer que, de même,
$$\mathbf{P}(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}.$$

9. Soient $1 \leqslant k \leqslant n+2$ et $1 \leqslant \ell \leqslant n+1$. En supposant que $\mathbf{P}(S_n = \ell) > 0$, calculer la probabilité conditionnelle
$$\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$$
dans chacun des trois cas suivants :

9. a. pour $\ell \notin \{k-1;\, k\}$;
9. b. pour $\ell = k - 1$;
9. c. pour $\ell = k$.

10. Démontrer que
$$\mathbf{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\mathbf{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbf{P}(S_n = k)$$
pour tout entier $2 \leqslant k \leqslant n+1$.

11. Démontrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

❖ III – Problème ❖

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que les valeurs propres de A sont toutes positives si, et seulement si,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X^\top.A.X \geqslant 0.$$

On note dans ce cas : $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie A. Exponentielle d'une matrice symétrique

1. Soient a et b, deux réels. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Donner, sans démonstration, les valeurs propres de J. En déduire les valeurs propres de A en remarquant que

$$A = (a-b)I_3 + bJ.$$

1. b. Démontrer que $A \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si,

$$a + 2b \geqslant 0 \quad \text{et} \quad a \geqslant b.$$

1. c. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la matrice $\exp(A)$ sous la forme d'un polynôme en J.
☞ *On rappelle que, <u>si</u> les matrices M et N commutent, alors*

$$\exp(M+N) = \exp(M) \cdot \exp(N).$$

1. d. En déduire que $\exp(A) \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.
☞ *On exprimera les valeurs propres de $\exp(A)$ en fonction des valeurs propres de J.*

Partie B. Produit de Hadamard

*Le **produit de Hadamard** de deux matrices réelles*

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \textit{et} \quad B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est défini par

$$A * B = (a_{i,j}b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Pour tout entier $p \geqslant 2$, on notera

$$A^{*p} = A * A * \cdots * A. \qquad (p \text{ fois})$$

Par convention, A^{*0} est la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $A^{*1} = A$.
❦ *Pour toute matrice réelle $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on pose également*

$$E(A) = \left(e^{a_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

❦ *Le produit de Hadamard correspond au produit des tableaux numpy et la matrice $E(A)$ est le résultat obtenu en appliquant la fonction* `numpy.exp` *au tableau numpy A.*
❦ *Chaque matrice $U \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ sera identifiée à son unique coefficient.*
❦ *L'objet de ce problème est de démontrer que, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, la matrice $E(A)$ est également symétrique et positive.*

2. On suppose *dans cette question seulement* que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R}).$$

Démontrer que $E(A) \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

3. Soient A et B, deux matrices symétriques positives.

3. a. Démontrer que

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

3. b. Le produit AB appartient-il nécessairement à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que

$$A = R^2.$$

5. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, deux matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après la question **[4.]**, il existe deux matrices

$$U = (u_{i,j}) \quad \text{et} \quad V = (v_{i,j})$$

dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que

$$A = U^2 \quad \text{et} \quad B = V^2.$$

En notant $A * B = (c_{i,j})$, démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right).$$

En déduire que

$$A * B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

6. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_N = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} A^{*p}.$$

Démontrer que la suite de matrices $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente et identifier sa limite.

*Une partie X de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **fermée** lorsqu'elle est stable par passage à la limite : si $A_N \in X$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et si la suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice L, alors $L \in X$.*

7. Démontrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad E(A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Solution I ❀ Similitudes

Partie A. Premières propriétés

1. a. Comme $\dim E \geqslant 2$, le sous-espace E n'est pas réduit au vecteur nul. Par conséquent, il existe au moins un vecteur unitaire x_0 et, par définition d'une similitude,

$$\|u(x_0)\| = k\,\|x_0\| = k.$$

S'il existe, le rapport k ne peut donc prendre qu'une seule valeur : il est donc bien défini.

1. b. Par définition,

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$$

donc l'application linéaire u est bien continue et $|||u||| \leqslant k$.

D'après la question précédente, pour tout vecteur x *unitaire*,

$$\|u(x)\| = k$$

donc

$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = k.$$

2. a. Soit $x \in E$. Dans la base canonique, les vecteurs x et $u(x)$ sont représentés par les colonnes

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AX = \begin{pmatrix} u+2v \\ -2u+v \end{pmatrix}.$$

Comme la base canonique est orthonormée, on en déduit que

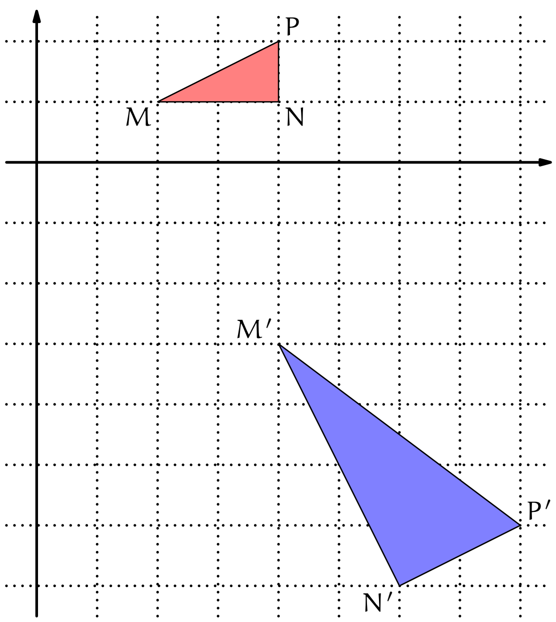
$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= X^\top.X = u^2+v^2 \\ \|u(x)\|^2 &= (AX)^\top.(AX) = (u+2v)^2 + (-2u+v)^2 \\ &= 5(u^2+v^2) \end{aligned}$$

donc

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| = \sqrt{5}\,\|x\|.$$

2. b. On trouve

$$M' = (4,-3), \quad N' = (6,-7), \quad P' = (8,-6).$$



NB : Les calculs qui suivent reposent sur le fait que la base choisie pour calculer les coordonnées est une **base orthonormée**.

Il est clair que le triangle MNP est rectangle en N, donc son aire est égale à

$$\frac{MN \cdot NP}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1.$$

Le triangle $M'N'P'$ est également rectangle en N', puisque

$$\langle\, \mathbf{M'N'} \mid \mathbf{N'P'} \,\rangle = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

donc l'aire de $M'N'P'$ est égale à

$$\frac{M'N' \cdot N'P'}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = 5.$$

3. Soit $x \in E$. Si $u(x) = 0_E$, alors

$$k\|x\| = \|u(x)\| = 0$$

et comme $k > 0$ par hypothèse, on en déduit que $\|x\| = 0$ et donc que $x = 0_E$. On a ainsi démontré que l'endomorphisme u était injectif (son noyau est réduit au vecteur nul de E).

Or E est un espace vectoriel de dimension finie et u est un endomorphisme de E. D'après le Théorème du rang, u est un automorphisme de E.

❧ En d'autres termes,

$$\mathrm{Sim}(E) \subset \mathrm{GL}(E).$$

On sait que $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe pour $\circ$. Il reste donc à vérifier que $\mathrm{Sim}(E)$ contient l'élément neutre ; que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par $\circ$ et que l'inverse de toute similitude est encore une similitude.

Il est clair que I_E, élément neutre de $\mathrm{GL}(E)$, appartient à $\mathrm{Sim}(E)$: c'est un endomorphisme de E et

$$\forall\, x \in E, \quad \|I_E(x)\| = \|x\| = 1\,\|x\|,$$

donc I_E est une similitude (de rapport 1).

Soient u et v, deux similitudes, de rapports respectifs k_1 et k_2. La composée $u \circ v$ est encore un endomorphisme de E et

$$\begin{aligned} \forall\, x \in E, \quad \|(u \circ v)(x)\| = \|u(v(x))\| &= k_1\,\|v(x)\| \\ &= k_1.k_2\,\|x\| \end{aligned}$$

donc $(u \circ v)$ est une similitude (de rapport $k_1k_2 > 0$).

Enfin, si $u \in \mathrm{Sim}(E)$, alors on sait que u est un automorphisme de E. Par conséquent, pour tout $x \in E$, il existe un, et un seul, vecteur $y = u^{-1}(x)$ tel que $u(y) = x$. On a donc

$$\|x\| = \|u(y)\| = k\,\|y\|$$

c'est-à-dire

$$\|u^{-1}(x)\| = \|y\| = \frac{1}{k}\,\|x\|.$$

Comme le facteur $1/k$ est strictement positif et indépendant de $x \in E$, on en déduit que u^{-1} est une similitude (de rapport $1/k$).

Ainsi, $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ et donc un groupe pour la loi $\circ$.

4. a. C'est une question de cours !

> *Le plus difficile est de trouver le point de départ qui permet de produire la démonstration aussi courte que possible (il ne s'agit pas de redémontrer tout le cours sur les isométries), tout en ayant un réel contenu (il ne suffit pas de mentionner qu'on sait bien qu'il s'agit d'un résultat du cours).*
> *En cas de doute, le plus sage est encore de s'abstenir, car il y a sûrement plus de temps à perdre que de points à gagner sur une telle question.*

❧ On sait que $u \in L(E)$ est une isométrie de E si, et seulement si,

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle\, u(x)\,|\,u(y)\,\rangle = \langle\, x\,|\,y\,\rangle.$$

Comme la base choisie $\mathscr{B}$ est une **base orthonormée** de E, cette identité se traduit matriciellement par

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (AX)^\top.(AY) = X^\top.Y$$

c'est-à-dire

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.(A^\top.A).Y = X^\top.Y.$$

En particulier,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad E_i^\top.(A^\top.A).E_j = E_i^\top.E_j = \delta_{i,j}$$

(les E_k représentent les vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) et donc

$$A^\top.A = I_n.$$

Réciproquement, si $A^\top.A = I_n$, alors il est clair que

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.(A^\top.A).Y = X^\top.Y.$$

Donc u est une isométrie si, et seulement si, la matrice A (qui représente u **dans une base orthonormée** de E) est une matrice orthogonale.

4. b. Si u est une similitude de rapport $k > 0$, alors $({}^1\!/_k) \cdot u$ est une isométrie :

$$\forall\, x \in E, \quad \left\|\frac{1}{k} \cdot u(x)\right\| = \frac{1}{k} \cdot k\,\|x\| = \|x\|,$$

donc la matrice de $({}^1\!/_k) \cdot u$ (relative à la **base orthonormée** $\mathscr{B}$) est une matrice orthogonale :

$$\left(\frac{1}{k} \cdot A\right)^\top.\left(\frac{1}{k} \cdot A\right) = I_n$$

et donc

$$A^\top.A = k^2 \cdot I_n.$$

5. a. Soit $x = (u, v, w) \in E$. En représentant le vecteur x par la colonne X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on représente le vecteur $u(x)$ par la colonne AX et comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une **base orthonormée** pour le produit scalaire considéré,

$$\left\|u(x)\right\|^2 = (AX)^\top.(AX) = X^\top.(A^\top.A).X.$$

Or, on vérifie facilement que $A^\top.A = 9I_3$, donc

$$\left\|u(x)\right\|^2 = 9 \cdot X^\top.X = 9\|x\|^2$$

(à nouveau parce qu'on effectue les calculs dans une base orthonormée) et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3, \quad \left\|u(x)\right\| = 3\,\|x\|.$$

L'endomorphisme u est bien une similitude, dont le rapport est égal à 3.

❧ On a remarqué que $A^\top.A = 9I_3$, donc

$$A^{-1} = \frac{1}{9}A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. b.

> *Cette question n'a aucun lien particulier avec la question précédente : je vais donc considérer que u est une similitude quelconque de rapport $k > 0$.*

D'après **[3.]**, l'endomorphisme u^{-1} est une similitude de rapport ${}^1\!/_k$, donc, pour tout vecteur $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|(u^{-1} \circ f \circ u)(x)\| &= \frac{1}{k}\|(f \circ u)(x)\| && \textbf{[3.]} \\ &= \frac{1}{k}\|u(x)\| && \text{(f est une isométrie)} \\ &= \frac{1}{k} \cdot k\,\|x\| && \text{(u est une similitude)} \\ &= \|x\| \end{aligned}$$

donc l'endomorphisme $(u^{-1} \circ f \circ u)$ est bien une isométrie.

6. Soit r, le rayon de la sphère X. On a donc

$$\forall\, \|y\| = 1, \qquad \|u(y)\| = r = r\,\|y\|.$$

Pour tout vecteur x non nul de E, le vecteur $y = \frac{x}{\|x\|}$ est unitaire, donc

$$\begin{aligned} r = \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| &= \left\|\frac{u(x)}{\|x\|}\right\| && \text{(linéarité de u)} \\ &= \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} && \text{(homogénéité de la norme)} \end{aligned}$$

et donc

$$\|u(x)\| = r\,\|x\|.$$

Cette propriété est évidemment vraie aussi pour $x = 0_E$, donc u est bien une similitude, dont le rapport est égal à r.

Partie B. Caractérisations

7. Si $u = f \circ (\alpha\, I_E)$, alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &= \left\|f(\alpha x)\right\| \\ &= \left\|\alpha f(x)\right\| && \text{(linéarité de f)} \\ &= \alpha\|f(x)\| && \text{(homogénéité de la norme et } \alpha > 0) \\ &= \alpha\|x\| && \text{(f isométrie)} \end{aligned}$$

donc u est bien une similitude et son rapport est égal à $\alpha > 0$.

❧ Réciproquement, si u est une similitude de rapport $k > 0$, alors **[4.b.]**

$$f = \frac{1}{k} \cdot u$$

est une isométrie et

$$u = \alpha \cdot f = f \circ (\alpha\, I_E)$$

avec $\alpha = k > 0$.

8. D'après **[2.a.]** et la question précédente,

$$A = \sqrt{5} \cdot M \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ Comme $\det M = +1$, la matrice orthogonale M représente une rotation.

9. a. Le résultat découle immédiatement de la relation bien connue :

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \langle x \,|\, y \rangle + \|y\|^2.$$

9. b. S'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle u(x) \,|\, u(y) \rangle = k^2 \langle x \,|\, y \rangle$$

alors en particulier

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\|^2 = k^2 \|x\|^2.$$

Comme $k > 0$ et que les normes sont positives,

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| = k\|x\|$$

donc u est bien une similitude de rapport k.

❧ Réciproquement, si u est une similitude de rapport $k > 0$, alors

$$\begin{aligned} \forall\, x, y \in E, \quad \|u(x) \pm u(y)\|^2 &= \|u(x \pm y)\|^2 \\ &= k^2 \|x \pm y\|^2 \end{aligned}$$

et on déduit de **[9.a.]** que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle u(x) \,|\, u(y) \rangle = k^2 \langle x \,|\, y \rangle.$$

REMARQUE.— La propriété **[9.a.]** est inutile, il suffit de savoir son cours sur les isométries et d'utiliser la remarque déjà faite en **[4.a.]** et en **[7.]**.

10. D'après la question précédente, si u est une similitude de rapport k et si $\langle x \,|\, y \rangle = 0$, alors

$$\langle u(x) \,|\, u(y) \rangle = k^2 \langle x \,|\, y \rangle = 0,$$

Donc u conserve l'orthogonalité.

11. a. Soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle e_i + e_j \,|\, e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

❧ Comme u est linéaire et conserve l'orthogonalité, on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(e_i + e_j) \,|\, u(e_i - e_j) \rangle \\ &= \langle u(e_i) + u(e_j) \,|\, u(e_i) - u(e_j) \rangle \end{aligned}$$

et par bilinéarité du produit scalaire à nouveau, on en déduit que

$$\|u(e_i)\|^2 = \|u(e_j)\|^2.$$

11. b. Ce qui précède montre que les normes $\|u(e_i)\|$ sont toutes égales (elles sont toutes positives). Comme u est un automorphisme, en particulier u est injectif, donc les vecteurs e_i (unitaires, donc non nuls) n'appartiennent pas au noyau de u. Il existe donc un réel $k > 0$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \|u(e_i)\| = k = k \times 1 = k\, \|e_i\|$$

puisque les vecteurs e_i sont unitaires.

❧ Soit $x \in E$. Comme la base $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée, on sait que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle\, e_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle\, u(e_i)$$

(par linéarité de u). Donc

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 \\ \|u(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 \|u(e_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 k^2 = k^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| = k\, \|x\|$$

puisque $k \geqslant 0$. Cela prouve que u est une similitude de rapport k.

Solution II ❀ Urnes de Pólya

Partie A. Préliminaires

1. D'après l'énoncé, la variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli, donc la loi de X_1 est caractérisée par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = 1) &= \frac{b}{b + r} && \text{(énoncé)} \\ \mathbf{P}(X_1 = 0) &= 1 - \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{r}{b + r} \end{aligned}$$

puisque $[X_1 = 0] = [X_1 = 1]^c$ (pour toute variable aléatoire de Bernoulli).

❧ On cherche à savoir si la boule tirée est blanche ou non : une telle alternative ne peut être modélisée que par une variable aléatoire de Bernoulli.

Le paramètre de cette loi est ici égal à la proportion de boules blanches initialement présentes dans l'urne, ce qui signifie qu'on a fait l'hypothèse que toutes les boules avaient la même chance d'être tirées (*hypothèse d'équiprobabilité*).

2. Soit $\omega \in \Omega$.

Par hypothèse, $S_0(\omega) = b$ est bien le nombre de boules blanches initialement présentes dans l'urne.

Si, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $S_n(\omega)$ est le nombre de boules blanches présentes au moment du n-ième tirage, alors

$$\begin{aligned} S_{n+1}(\omega) &= S_n(\omega) + X_n(\omega) \\ &= \left| \begin{array}{ll} S_n(\omega) & \text{(on a tiré une boule rouge)} \\ S_n(\omega) + 1 & \text{(on a tiré une boule blanche).} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, si on tire une boule rouge (resp. une boule blanche), alors le nombre de boules blanches ne change pas (resp. on a retiré une boule blanche et on en a remis deux, donc le nombre de boules blanches a augmenté d'une unité).

On a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $S_n(\omega)$ était bien égal au nombre de boules blanches dans l'urne au moment de procéder au n-ième tirage.

❧ Puisque les variables aléatoires X_k suivent une loi de Bernoulli,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant X_k(\omega) \leqslant 1,$$

donc

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \leqslant n$$

et donc

$$b \leqslant S_n(\omega) \leqslant b+n.$$

L'ensemble des valeurs possibles pour S_n est donc

$$[\![b, b+n]\!].$$

3. Comme $\mathbf{P}(X_1 = 1) > 0$, la loi conditionnelle sachant $[X_1 = 1]$ est bien définie.

❧ Comme $X_2 : \Omega \to \{0; 1\}$, la loi de X_2 est une loi de Bernoulli aussi bien pour la mesure $\mathbf{P}$ que pour la mesure $\mathbf{P}_{[X_1=1]}$, seul le paramètre de cette loi (c'est-à-dire la probabilité de $[X_2 = 1]$) peut changer.

❧ Comme $[X_1 = 1] = [S_1 = b+1]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) &= \mathbf{P}(X_2 = 1 \mid S_1 = b+1)\\ &= \frac{b+1}{b+1+r}.\end{aligned}$$

Sous la mesure conditionnelle $\mathbf{P}_{[X_1=1]}$, la variable aléatoire X_2 suit donc la loi de Bernoulli de paramètre

$$\frac{b+1}{b+r+1}.$$

❧ De même, comme $[X_1 = 0] = [S_1 = b]$,

$$\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \mathbf{P}(X_2 = 1 \mid S_1 = b) = \frac{b}{b+r+1}.$$

On peut alors appliquer la Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 1) &= \sum_{k=0}^{1} \mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = k)\,\mathbf{P}(X_1 = k)\\ &= \frac{b+r}{b+r+1}\cdot\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1}\cdot\frac{r}{b+r}\\ &= \frac{b(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r}.\end{aligned}$$

On en déduit que, sous la mesure $\mathbf{P}$, les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi : la loi de Bernoulli de paramètre $b/(b+r)$.

Partie B. Loi de X_n

4. D'après **[2.]**, la famille

$$\big([S_n = k]\big)_{b \leqslant k \leqslant b+n}$$

est un système complet d'évènements et, d'après l'énoncé, aucun de ces évènements n'est négligeable.

D'après la Formule des probabilités totales et l'expression des probabilités conditionnelles données par l'énoncé,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)\,\mathbf{P}(S_n = k)\\ &= \sum_{k=b}^{b+n} \frac{k}{b+r+n}\,\mathbf{P}(S_n = k)\\ &= \frac{1}{b+r+n}\sum_{k=b}^{b+n} k\,\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{\mathbf{E}(S_n)}{b+r+n}.\end{aligned}$$

5. On sait **[3.]** que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la loi de Bernoulli de paramètre p.

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 2$, toutes les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

On sait déjà **[1.]** que X_{n+1} suit une loi de Bernoulli.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = b + np = \frac{b}{b+r}\cdot(n+b+r)$$

et, de même,

$$\mathbf{E}(S_{n+1}) = \mathbf{E}(S_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}).$$

On déduit alors de **[4.]** que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_{n+1}) &= \mathbf{E}(S_n)\cdot\frac{b+r+n+1}{b+r+n}\\ &= \frac{b}{b+r}\cdot(b+r+n+1).\end{aligned}$$

On en déduit que X_{n+1} suit la loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(S_{n+1}) - \mathbf{E}(S_n) = \frac{b}{b+r} = p$$

et on a démontré (par récurrence "forte") que toutes les variables aléatoires X_k suivaient la loi de Bernoulli de paramètre p.

Partie C. Loi de S_n

6. Comme les variables aléatoires X_k sont positives et que $b = 1$,

$$\begin{aligned}S_n(\omega) = 1 &\iff \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = 0\\ &\iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad X_k(\omega) = 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[S_n = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0].$$

> *Chaque tirage modifie la composition de l'urne, donc on se doute que les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes. On a donc écrit l'évènement $[S_n = 1]$ comme une intersection d'évènements qui ne sont pas indépendants, le calcul de sa probabilité ne sera pas une simple routine !*

7. D'après l'énoncé,

$$\mathbf{P}(S_0 = 1) = 1 = \frac{1}{0+1}.$$

HR : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbf{P}(S_{n-1} = 1) = \frac{1}{n}.$$

D'après **[6.]**,

$$[S_n = 1] = [X_n = 0] \cap [S_{n-1} = 1]$$

et comme $\mathbf{P}(S_{n-1} = 1) > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n = 1) &= \mathbf{P}(X_n = 0 \mid S_{n-1} = 1)\,\mathbf{P}(S_{n-1} = 1)\\ &= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = 0 \mid S_{n-1} = 1) &= 1 - \mathbf{P}(X_n = 1 \mid S_{n-1} = 1)\\ &= 1 - \frac{1}{2+(n-1)} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

8. Comme les variables aléatoires X_k sont toutes majorées par 1,

$$[S_n = n+1] = \bigcap_{k=1}^{n}[X_k = 1] = [X_n = 1] \cap [S_{n-1} = n]$$

donc, comme au **[7.]**,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n = n+1) &= \mathbf{P}(X_n = 1 \mid S_{n-1} = n)\,\mathbf{P}(S_{n-1} = n)\\ &= \frac{n}{n+1}\,\mathbf{P}(S_{n-1} = n).\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence, comme au **[7.]**, que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}.$$

9. Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) &= \frac{\mathbf{P}(S_{n+1} = k, S_n = \ell)}{\mathbf{P}(S_n = \ell)}\\ &= \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = k-\ell, S_n = \ell)}{\mathbf{P}(S_n = \ell)}\\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} = k-\ell \mid S_n = \ell).\end{aligned}$$

9. a. Comme les valeurs possibles de X_{n+1} sont 0 et 1 (sous quelque mesure de probabilité que ce soit, $\mathbf{P}$ ou une autre), si $k-\ell \notin \{0; 1\}$, c'est-à-dire si $\ell \notin \{k-1; k\}$, alors

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k-\ell \mid S_n = \ell) = 0$$

et donc

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) = 0.$$

9. b. Pour $\ell = k-1$, on a $k-\ell = 1$ et on déduit de l'énoncé que

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) = \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = \ell) = \frac{\ell}{n+2}$$

puisque $b + r = 1 + 1 = 2$.

9. c. De même, pour $\ell = k$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = \ell)\\ &= 1 - \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = \ell)\\ &= \frac{n+2-\ell}{n+2}.\end{aligned}$$

10. Comme $b = 1$, on déduit de **[2.]** que la famille

$$\big([S_n = k]\big)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$$

est un système complet d'évènements. On déduit alors de la Formule des probabilités totales que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1}\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)\,\mathbf{P}(S_n = \ell)\\ &= \sum_{\ell=k-1}^{k}\mathbf{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)\,\mathbf{P}(S_n = \ell) && \textbf{[9.a.]}\\ &= \frac{k-1}{n+2}\,\mathbf{P}(S_n = k-1) && \textbf{[9.b.]}\\ &\quad + \frac{n+2-k}{n+2}\,\mathbf{P}(S_n = k). && \textbf{[9.c.]}\end{aligned}$$

11. Comme S_0 est constante, égale à 1, elle suit la loi uniforme sur $[\![1, 0+1]\!]$.

Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n suive la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

D'après **[7.]** et **[8.]**,

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$$

et d'après **[10.]**, pour tout entier $2 \leqslant k \leqslant n+1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n+1} = k) &= \Big(\frac{k-1}{n+2} + \frac{n+2-k}{n+2}\Big)\cdot\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire S_n suivait la loi uniforme discrète sur

$$[\![1, n+1]\!].$$

Solution III ❀ Produit de Hadamard

Partie A. Exponentielle d'une matrice symétrique

1. a. La matrice J est bien connue et ses valeurs propres sont 0 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).

Pour tout polynôme P, les valeurs propres de $P(J)$ sont donc $P(0)$ et $P(3)$.

En particulier, les valeurs propres de A sont

$$(a-b) \quad \text{et} \quad (a-b)+3b = a+2b.$$

1. b. Il est clair que $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. D'après **[1.a.]**, les valeurs propres de A sont positives si, et seulement si, $a+2b \geqslant 0$ et $(a-b) \geqslant 0$, donc

$$A \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} a+2b \geqslant 0 \\ a \geqslant b \end{cases}.$$

1. c. Comme $J^2 = 3J$, on peut démontrer par récurrence que

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 1,} \quad J^k = 3^{k-1}J.$$

Attention ! cette formule est fausse pour $k=0$, puisque

$$J^0 = I_3 \neq \frac{1}{3}J.$$

❧ L'énoncé nous a indiqué que

$$A = (a-b)I_3 + bJ$$

et les deux matrices $(a-b)I_3$ et bJ commutent (puisque les homothéties commutent à toutes les matrices). Par conséquent,

$$\exp(A) = \exp[(a-b)I_3] \cdot \exp(bJ).$$

L'exponentielle d'une homothétie est encore une homothétie (cours !) :

$$\exp[(a-b)I_3] = e^{a-b}I_3.$$

D'après les calculs qui précèdent,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad (bJ)^k = b^k 3^{k-1} J$$

donc (en faisant bien attention au terme en $k=0$, qui doit être traité à part)

$$\begin{aligned}\exp(bJ) &= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} J^k \\ &= I_3 + \Big(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(3b)^k}{k!}\Big) J \\ &= I_3 + \frac{e^{3b}-1}{3} \cdot J.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\exp(A) &= e^{a-b}\Big(I_3 + \frac{e^{3b}-1}{3} \cdot J\Big) \\ &= e^{a-b}I_3 + \frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3} \cdot J.\end{aligned}$$

Il me paraît plus pertinent d'écrire

$$\exp(A) = e^{a-b}\Big(I_3 - \frac{1}{3} \cdot J\Big) + e^{a+2b} \cdot \frac{1}{3} \cdot J,$$

puisque cette décomposition de $\exp(A)$ *fait apparaître les deux valeurs propres*

$$e^{a-b} \quad \textit{et} \quad e^{a+2b}$$

et les deux projecteurs spectraux associés

$$I_3 - \frac{1}{3} \cdot J \quad \textit{et} \quad \frac{1}{3} \cdot J.$$

1. d. Comme J est symétrique réelle et que $\exp(A)$ est un polynôme en J, il est clair que $\exp(A)$ est une matrice symétrique réelle. Comme en **[1.b.]**, on peut déduire les valeurs propres de $\exp(A)$ des valeurs propres de J :

$$e^{a-b} \quad \text{et} \quad e^{a-b} + \frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3} \cdot 3 = e^{a+2b}.$$

Comme les valeurs propres de $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ sont toutes *strictement positives*, on en déduit que $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

Partie B. Produit de Hadamard

2. Par définition,

$$\begin{aligned}E(A) &= \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix} \\ &= (e^a - e^b)I_3 + e^b J.\end{aligned}$$

Il est clair que la matrice $E(A)$ est symétrique réelle.

D'après **[1.b.]**, la matrice $E(A)$ est positive si, et seulement si,

$$e^a + 2e^b \geqslant 0 \quad \text{et} \quad e^a \geqslant e^b$$

(on substitue e^a à a et e^b à b). La première condition est évidemment remplie. Comme on suppose ici que $A \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, alors on sait que $a \geqslant b$ **[1.b.]** et donc, comme la fonction exp est croissante, $e^a \geqslant e^b$.

On a ainsi démontré sur un cas particulier que : si $A \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, alors $E(A) \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

3. a. Comme les matrices A et B sont symétriques, il est clair que

$$\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Comme les matrices symétriques A et B sont positives, alors

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.A.X \geqslant 0 \quad \text{et} \quad X^\top.B.X \geqslant 0.$$

Comme les réels α et β sont positifs, on en déduit que

$$\begin{aligned}X^\top.(\alpha A + \beta B).X &= \alpha X^\top.A.X + \beta X^\top.B.X \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

donc $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3. b. Il est clair que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$$

(la matrice est symétrique et ses valeurs propres sont positives).

La matrice
$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$
est clairement symétrique réelle. D'après le Théorème spectral, elle est diagonalisable.

Si $\det B = ac - b^2 \geqslant 0$, alors ses deux valeurs propres (réelles) sont de même signe. Il suffit alors que $\operatorname{tr} B = a + c \geqslant 0$ pour être sûr que les deux valeurs propres de B sont positives. En particulier,
$$B = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R}).$$

Comme $b \neq 0$, le produit
$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$
n'est même pas une matrice symétrique et n'appartient donc pas à $\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ n'est donc pas stable par produit.

4. Comme $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale Q et des réels
$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$
tels que
$$Q^\top.A.Q = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$
Comme les valeurs propres λ_k sont des réels *positifs*, on peut poser
$$R = Q.\operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).Q^{-1}.$$

Deux matrices semblables ayant les mêmes valeurs propres, on en déduit que les valeurs propres de R sont positives :
$$\operatorname{Sp}(R) = \big\{\sqrt{\lambda_k},\ 1 \leqslant k \leqslant n\big\}$$
et comme la matrice Q est orthogonale, la matrice R est symétrique réelle :
$$\begin{aligned} R &= Q.\operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).Q^\top, \\ R^\top &= (Q^\top)^\top.\operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).Q^\top \\ &= R \end{aligned}$$
donc $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Enfin,
$$R^2 = Q.\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).Q^{-1} = Q.Q^\top.A.Q.Q^{-1} = A$$
puisque Q est orthogonale.

On a ainsi démontré qu'il existait au moins une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

5. D'après la formule du produit matriciel (le produit matriciel usuel !),
$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{i,k}u_{k,j}$$
et comme la matrice U est symétrique,
$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n u_{k,i}u_{k,j}.$$

De même,
$$b_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n v_{\ell,i}v_{\ell,j}$$
et le résultat découle alors de la formule du produit de Hadamard :
$$c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}.$$

❧ Comme A et B sont symétriques réelles,
$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad \text{et} \quad b_{i,j} = b_{j,i}$$
donc
$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j} = a_{j,i}b_{j,i} = c_{j,i}$$
et le produit de Hadamard $A * B$ est une matrice symétrique réelle.

Quelle que soit la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned} X^\top.(A*B).X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i c_{i,j} x_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n u_{k,i}u_{k,j}v_{\ell,i}v_{\ell,j}x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n u_{k,i}v_{\ell,i}x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n u_{k,j}v_{\ell,j}x_j\Big) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n u_{k,i}v_{\ell,i}x_i\Big)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$
et par conséquent $A * B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

6. On sait (cours) qu'une série de matrices converge si, et seulement si, les suites des coefficients convergent toutes et, dans ce cas,
$$\lim_{N\to+\infty} T_N = \big(\lim_{N\to+\infty} T_N[i,j]\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

❧ Par définition du produit de Hadamard,
$$T_N = \Big(\sum_{p=0}^N \frac{1}{p!}a_{i,j}^p\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Les coefficients de T_N sont donc les sommes partielles de séries de Poisson. Par conséquent, la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge et
$$\lim_{N\to+\infty} T_N = \big(e^{a_{i,j}}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = E(A).$$

7. On suppose que $A_N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et que la suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L = (L_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

D'après le cours,
$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad L_{i,j} = \lim_{N\to+\infty} A_N[i,j].$$

Or les matrices A_N sont supposées symétriques réelles :
$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad A_N[i,j] = A_N[j,i]$$

donc la matrice L est symétrique réelle :

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad L_{i,j} = L_{j,i} \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, quelle que soit la colonne X,

$$X^\top.A_N.X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_N[i,j] x_j \geqslant 0$$

(puisque $A_N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$). En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit (linéarité de la limite) que

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i L_{i,j} x_j = X^\top.L.X,$$

ce qui prouve que $L \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On déduit de **[5.]** que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{*p} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

De plus,

$$A^{*0} = J_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

puisque les valeurs propres de J_n, égales à 0 et n, sont positives.

On déduit alors de **[3.a.]** que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad T_N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

(combinaison linéaire dont les coefficients sont tous positifs).

D'après **[6.]**, la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente. Comme on vient de prouver que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que la limite $E(A)$ de la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ appartient encore à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.