

1. L'**optimisation** consiste à déterminer les extrema d'une fonction à valeurs réelles.

2. Un **extremum** (maximum ou minimum) est une valeur particulière de la fonction. On distingue deux types d'extrema.

2.1  $\Leftarrow$  La fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  atteint un **maximum global**, ou **maximum absolu**, au point  $M_0 \in X$  si, et seulement si,

$$\forall M \in X \quad f(M) \leq f(M_0).$$

2.2 On note  $\mathcal{V}_X(M_0)$ , l'ensemble des voisinages du point  $M_0$  relatifs à l'ensemble  $X$  sur lequel la fonction  $f$  est définie.

2.3  $\Leftarrow$  La fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  atteint un **maximum local**, ou **maximum relatif**, au point  $M_0 \in X$  si, et seulement si,

$$\exists V \in \mathcal{V}_X(M_0), \forall M \in V, \quad f(M) \leq f(M_0).$$

2.4 Tout extremum absolu est en particulier un extremum local.

2.5 Il ne faut pas confondre un extremum de  $f$ , qui est une valeur réelle de  $f$ , avec les points de  $X$ , parfois appelés **extrémants** de  $f$ , où la fonction  $f$  prend cette valeur particulière.

2.6 Si  $f$  atteint un maximum global, cette valeur maximale est unique. Il est atteint en un point au moins de  $X$ , mais peut être atteint en plusieurs points de  $X$  (éventuellement en une infinité de points de  $X$ ).

2.7 Une fonction peut atteindre plusieurs maxima relatifs différents sans atteindre de maximum absolu.

3. Les extrema d'une fonction numérique  $f$  définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  peuvent se déduire des variations de  $f$ .

Pour une fonction  $f$  définie sur une partie  $X$  de  $\mathbb{R}^d$ , l'étude des variations n'a plus de sens et la recherche des extrema, qu'il s'agisse de leur valeur ou des endroits où ils sont atteints, est un problème difficile en général.

## I

### Compacité et existence d'extrema

4. Toute fonction bornée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  admet une borne supérieure et une borne inférieure, mais cela ne prouve pas qu'elle atteigne effectivement un maximum ou un minimum.

5. **Parties compactes de  $\mathbb{R}^d$**

La notion de **partie compacte** généralise la notion de **segment** sur  $\mathbb{R}$  et l'étend aux espaces vectoriels de dimension finie.

5.1 Une partie  $K$  de  $\mathbb{R}^d$  est **fermée** lorsqu'elle est stable par passage à la limite : si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de vecteurs appartenant à  $K$  qui converge vers le vecteur  $\ell$ , alors le vecteur  $\ell$  appartient encore à  $K$ .

Cette notion ne dépend pas de la norme choisie sur  $\mathbb{R}^d$ .

5.2 Une partie  $K$  de  $\mathbb{R}^d$  est **compacte** lorsqu'elle est simultanément fermée et bornée.

Cette notion ne dépend pas non plus de la norme choisie sur l'espace  $\mathbb{R}^d$ .

5.3 Tout segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  est donc compact, mais une partie compacte de  $\mathbb{R}$  n'est pas nécessairement un segment : l'union de deux segments est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ .

5.4 L'**ensemble triadique**  $K_C$  de Cantor est une partie compacte contenue dans  $[0, 1]$  qui possède des propriétés étonnantes.

— Comme  $\mathbb{Q}$ , il est totalement discontinu : entre deux points de  $K_C$ , il existe un réel qui n'appartient pas à  $K_C$ .

— Comme  $\mathbb{Q}$ , tout voisinage d'un point de  $K_C$  contient une infinité de points de  $K_C$ .

— Comme  $\mathbb{Q}$ , il est de mesure nulle : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-intervalles de  $[0, 1]$  dont l'union contient  $K_C$  alors que la somme de leurs longueurs est inférieure à  $\varepsilon$ .

— Comme  $\mathbb{R}$  et contrairement à  $\mathbb{Q}$ , il n'est pas dénombrable.

6. **Théorème d'existence d'extrema**

6.1  $\rightarrow$  Soit  $f$ , une fonction continue de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . La restriction de  $f$  à une partie compacte  $K \subset \mathbb{R}^d$  est bornée et atteint ses bornes.

6.2 Le théorème [6.1] prouve l'existence d'extrema absolus (maximum et minimum), mais ne permet pas d'estimer la valeur de ces extrema puisqu'il ne donne aucune indication sur les points de  $K$  où ces extrema sont atteints.

6.3 En outre, l'existence d'éventuels extrema relatifs distincts des extrema absolus ne peut être prouvée de cette manière.

7. **Exemples**

7.1 La fonction  $f$  définie sur  $D = [x^2 + y^2 \leq 2]$  par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = xy|x^2 + y^2 - 1|$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur  $D$ .

7.2 La fonction  $f$  définie sur  $D = [x^2 + y^2 \leq 1]$  par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur  $D$ .

7.3 La fonction  $f$  définie sur  $D = [x^2 + y^2 \leq 16]$  par

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur  $D$ .

7.4 Soit  $K = [x \geq 0] \cap [y \geq 0] \cap [x + y \leq 1] \subset \mathbb{R}^2$ .

La fonction  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in K, \quad f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur  $K$ .  $\rightarrow$ [25]

8. **Extrema d'une forme affine**

On étudie une **forme affine**  $f$  sur  $\mathbb{R}^d$ , définie par

$$\forall M \in \mathbb{R}^d, \quad f(M) = f(O) + \varphi(OM)$$

où  $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^d$ .

8.1 En général, la fonction  $f$  n'a pas de point critique.

8.2 Quelle que soit la partie fermée et bornée  $K \subset \mathbb{R}^d$ , la fonction  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $K$ .

8.3 Si  $\mathbb{R}^d$  est muni de sa structure euclidienne canonique, alors

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad f(A + u) = f(A) + \langle \nabla f(A) | u \rangle$$

quel que soit le point  $A \in \mathbb{R}^d$ .

8.4 Si le compact  $K$  est la boule fermée de centre  $A$  et de rayon  $r$  :

$$K = [\|AM\|^2 \leq r^2],$$

alors  $f$  atteint respectivement son maximum strict et son minimum strict aux points  $M_+$  et  $M_-$  définis par

$$M_+ = A + r \cdot \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}, \quad M_- = A - r \cdot \frac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|}.$$

8.5 Si  $f$  prend la même valeur (extrémale ou non) en deux points distincts  $M_1$  et  $M_2$ , alors la droite  $(M_1M_2)$  est orthogonale au gradient de  $f$  et

$$\forall M \in [M_1, M_2], \quad f(M) = f(M_1) = f(M_2).$$

8.6 En dimension 2, si  $K$  est un rectangle :

$$K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$$

alors  $f$  atteint ses valeurs extrêmes en l'un des sommets du rectangle. Il suffit de calculer ces quatre valeurs de  $f$  et de les comparer pour obtenir le maximum et le minimum de  $f$ .

8.7 Exemples

1. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x - y + 3$$

sur  $K = [x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 5]$ .

2. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x + 3y + 2$$

sur  $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

3. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = -3x + 2y + z - 2$$

sur  $K = [x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z \leq 3]$ .

4. Calculer les extrema de la fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = x + 2y - z + 1$$

sur  $K = [-1, 1] \times [-2, 2] \times [0, 2]$ .

Existence d'extrema sur une partie non compacte

9. Un argument de compacité permet de justifier qualitativement l'existence d'un extremum, en n'effectuant que les calculs nécessaires pour appliquer le théorème [6.1].

9.1 Fonctions propres

Si  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue qui tend vers  $+\infty$  au voisinage de de l'infini, alors la fonction  $f$  atteint un minimum absolu.

9.2 Si  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et positive qui tend vers 0 au voisinage de l'infini, alors elle atteint un maximum absolu.

10. Exemples

- 10.1 La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f = [(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy]$$

atteint un minimum absolu sur  $\mathbb{R}^2$ .

- 10.2 La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f = [(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2]$$

atteint un minimum absolu sur  $\mathbb{R}^2$ .

- 10.3 La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f = [(x, y) \mapsto (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}]$$

atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur  $\mathbb{R}^2$ .

- 10.4 Soit  $a > 0$ . Les fonctions définies sur  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  par

$$f_1(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \quad f_2(x, y) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} + \frac{xy}{a^2}$$

$$f_3(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy} \quad f_4(x, y) = x + y + \frac{a}{xy}$$

atteignent un minimum absolu sur  $U$ .

- 10.5 La fonction  $f$  définie sur  $A = [0 < x \leq a \leq b \leq y] \subset \mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in A, \quad f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{xy}$$

atteint un minimum absolu sur  $A$ .

11. L'application

$$f = [(x, y) \mapsto (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}]$$

atteint un maximum et un minimum sur  $\mathbb{R}^2$ .

II

Recherche d'extrema locaux

12. Lorsque la fonction  $f$  est définie sur un ouvert, la formule de Taylor peut servir à localiser un extremum en décrivant le comportement de  $f$  au voisinage d'un point  $M_0 \in U$ . Un développement limité ayant une valeur locale, cette technique ne peut servir qu'à justifier la présence d'un extremum relatif.

13. En particulier, on pourra peut-être déterminer l'endroit où un extremum global est atteint (et la valeur de cet extremum), mais les techniques qui vont être présentées maintenant ne peuvent en aucune manière prouver que cet extremum est bien un extremum global.

14. Si la fonction  $f$  est définie sur une partie  $X$  qui n'est pas ouverte, il faudra étudier  $f$  d'une part sur l'intérieur  $U$  de  $X$  (qui est bien un ouvert) et d'autre part sur le bord  $\partial X$  de  $X$  (qui est un fermé d'intérieur vide).

II.1 Condition nécessaire au premier ordre

15. Il suffit de savoir où un extremum est atteint pour déterminer sa valeur!

15.1 Si  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  atteint un extremum local au point  $M_0 \in U$ , alors la fonction

$$\varphi_v = [t \mapsto f(M_0 + t \cdot v)]$$

atteint un extremum local en  $t = 0$ , quel que soit  $v \in E$ .

15.2 On déduit alors de [16.22.3] la condition nécessaire suivante.

15.3  $\rightarrow$  Si  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  atteint un extremum local en un point  $M_0$  de l'ouvert  $U$ , alors  $M_0$  est un point critique de  $f$ .

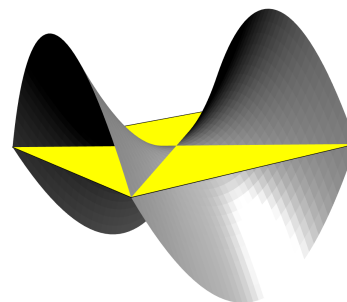
15.4 Si  $f$  est continue sur le compact  $K$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intérieur  $U$  de  $K$ , alors  $f$  atteint chacun de ses deux extrema

- ou bien en un point critique  $M_0 \in U$ ;
- ou bien en un point  $M_0 \in \partial K$  du bord de  $K$ .

16. L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

admet l'origine pour unique point critique, mais n'atteint ni maximum local, ni minimum local en ce point.



17. Un point critique singulier

1. La fonction  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$$

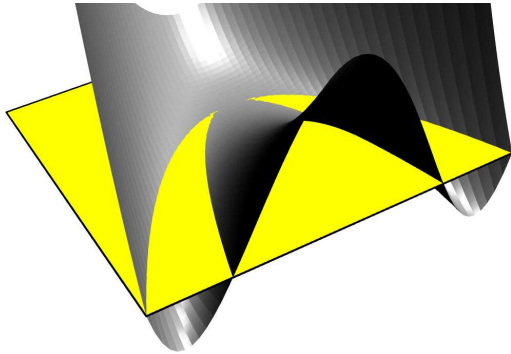
admet l'origine  $O$  comme seul point critique. La hessienne [18.3] de  $f$  en  $O$  est positive, mais pas définie positive.

2. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $\mathbf{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ .  
Un équivalent de  $f(t \cdot \mathbf{u}_\theta)$  au voisinage de  $t = 0$  montre que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \exists \alpha_\theta > 0, \forall 0 < t < \alpha_\theta, f(t \cdot \mathbf{u}_\theta) > f(O).$$

Ainsi, la restriction de  $f$  à une droite quelconque passant par  $O$  atteint un minimum local strict en  $O$  — ce qui ne signifie que pas que  $f$  atteigne un minimum strict en  $O$ .

3. Comme  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ , la fonction  $f$  n'atteint pas un minimum strict en  $O$ .



## II.2 Étude au second ordre

18. Soit  $U$ , un ouvert de l'espace  $E = \mathbb{R}^d$ . On suppose que  $E$  est muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée et on étudie une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  au voisinage d'un point  $M_0$ .

18.1 On sait [16.32.2] alors que, pour tout vecteur  $\mathbf{w} \in E$ ,

$$f(M_0 + t \cdot \mathbf{v}) = f(M_0) + t \langle \nabla f(M_0) | \mathbf{v} \rangle + o(t)$$

lorsque  $t$  tend vers 0.

18.2 Nous allons préciser ce développement limité en supposant que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ .

18.3  $\Leftrightarrow$  La matrice hessienne de  $f$  au point  $M_0 \in U$  est définie par

$$H_f(M_0) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) \right)_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}).$$

18.4  $\Leftrightarrow$  L'endomorphisme auto-adjoint représenté dans la base canonique par la matrice  $H_f(M_0)$  est noté  $\nabla^2 f(M_0)$ .

18.5  $\rightarrow$  Formule de Taylor-Young à l'ordre deux

Si la fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors

$$f(M_0 + \mathbf{h}) = f(M_0) + \langle \nabla f(M_0) | \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{h} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{h}) \rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2)$$

lorsque  $\mathbf{h}$  tend vers 0.

18.6 Si  $M_0$  est un point critique, alors

$$\begin{aligned} f(M_0 + \mathbf{h}) &\underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{=} f(M_0) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{h} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{h}) \rangle + o(\|\mathbf{h}\|^2) \\ &\underset{\mathbf{h} \rightarrow 0}{=} f(M_0) + \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{2} (\langle \mathbf{u} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{u}) \rangle + o(1)) \end{aligned}$$

où on a posé  $\mathbf{u} = \mathbf{h}/\|\mathbf{h}\|$  (en supposant que le déplacement  $\mathbf{h}$  n'était pas nul).

18.7 Le comportement de  $f$  au voisinage de  $M_0$  est donc décrit par le comportement sur la sphère unité de  $E = \mathbb{R}^d$  de la forme quadratique  $q$  associée à la hessienne de  $f$  :

$$\forall \mathbf{v} \in E, q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{v}) \rangle.$$

### Condition nécessaire au second ordre

19. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$  et que le point  $M_0 \in U$  est un point critique de  $f$ .

19.1 Si  $f$  atteint un maximum local en  $M_0$ , alors pour tout vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  et tout réel  $t$  assez petit,

$$f(M_0 + t \cdot \mathbf{u}) - f(M_0) \leq 0$$

et par conséquent, pour tout vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ ,

$$\langle \mathbf{u} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{u}) \rangle \leq 0.$$

19.2  $\rightarrow$  Si  $f$  atteint un maximum local au point  $M_0 \in U$ , alors la hessienne de  $f$  en  $M_0$  est négative :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^-(\mathbb{R}).$$

19.3  $\rightarrow$  Si  $f$  atteint un minimum local au point  $M_0 \in U$ , alors la hessienne de  $f$  en  $M_0$  est positive :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R}).$$

And now a word from our sponsor.



### 19.4 $\rightarrow$ Point col ou point selle

Si la hessienne de  $f$  en  $M_0$  admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors  $f$  n'atteint pas un extremum local en  $M_0$ .

### Condition suffisante au second ordre

20. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$  et que le point  $M_0 \in U$  est un point critique de  $f$ .

20.1 Si la hessienne  $H_f(M_0)$  est définie positive, alors il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\langle \mathbf{u} | \nabla^2 f(M_0)(\mathbf{u}) \rangle \geq \alpha$$

pour tout vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ .

$\rightarrow$  [15.63.4]

20.2  $\rightarrow$  Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$  et si  $M_0 \in U$  est un point critique de  $f$  tel que la hessienne de  $f$  soit définie positive :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$$

alors  $f$  atteint un minimum local strict au point  $M_0$ .

20.3  $\rightarrow$  Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U$  et si  $M_0 \in U$  est un point critique de  $f$  tel que la hessienne de  $f$  soit définie négative :

$$H_f(M_0) \in \mathcal{S}_d^{--}(\mathbb{R})$$

alors  $f$  atteint un maximum local strict au point  $M_0$ .

Cas de la dimension deux

21. Réduction de la hessienne en dimension 2

La base canonique de  $E = \mathbb{R}^2$  est notée  $\mathcal{B}_0 = (e_x, e_y)$ .

21.1 La décomposition d'un vecteur  $h \in E$  dans cette base orthonormée

$$h = h_x \cdot e_x + h_y \cdot e_y$$

permet de calculer sa norme :

$$\|h\|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

21.2 La matrice de  $\nabla^2 f(M_0)$  dans la base canonique est

$$H_f(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{pmatrix}$$

et le développement limité de  $f$  à l'ordre deux au voisinage du point critique peut aussi s'écrire

$$f(M_0 + h) = f(M_0) + \frac{1}{2}q(h) + o(\|h\|^2)$$

avec

$$q(h) = \langle h | \nabla^2 f(M_0)(h) \rangle = (h_x \ h_y) H_f(M_0) \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) h_x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) h_x h_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) h_y^2.$$

21.3 Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B} = (u, v)$  de vecteurs propres de  $\nabla^2 f(M_0)$ .

1. La décomposition du vecteur  $h$  dans cette base

$$h = h_u \cdot u + h_v \cdot v$$

donne

$$\|h\|^2 = h_x^2 + h_y^2 = h_u^2 + h_v^2.$$

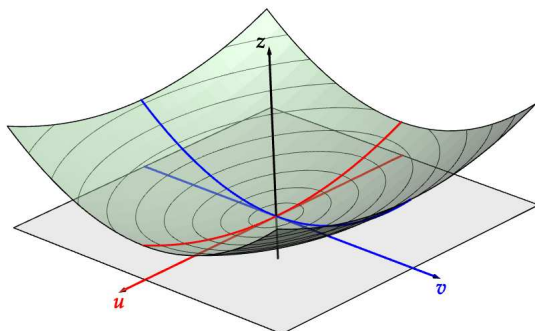
2. En notant  $\lambda$  et  $\mu$ , les valeurs propres de  $\nabla^2 f(M_0)$  respectivement associées à  $u$  et  $v$ ,

$$\forall h \in E, \quad q(h) = \lambda h_u^2 + \mu h_v^2.$$

3. Si  $0 < \lambda \leq \mu$ , alors  $q(h) \geq \lambda \|h\|^2$  et

$$f(M_0 + h) > f(M_0)$$

pour tout vecteur non nul  $h$  assez petit.



4. Si  $\lambda \leq \mu < 0$ , alors  $q(h) \leq \mu \|h\|^2$  et

$$f(M_0 + h) < f(M_0)$$

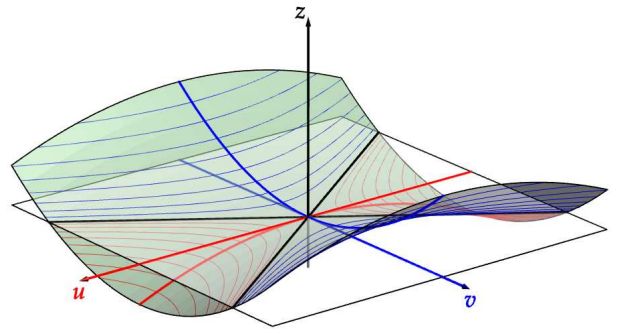
pour tout vecteur non nul  $h$  assez petit.

5. Si  $\lambda < 0 < \mu$ , alors [19.4]

$$f(M_0 + t \cdot u) < f(M_0) < f(M_0 + t \cdot v)$$

pour tout scalaire  $t \neq 0$  assez petit.

→[16]

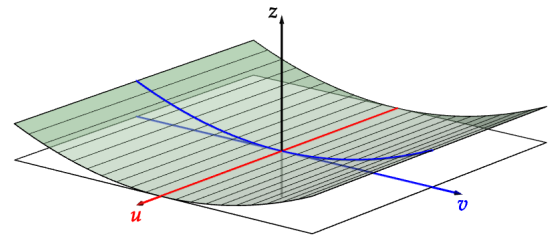


6. Si le vecteur propre  $u$  est associé à la valeur propre  $\lambda = 0$ , alors

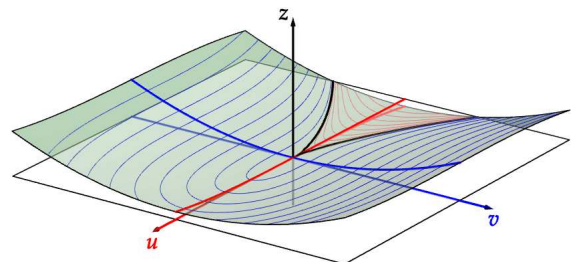
$$f(M_0 + t \cdot u) - f(M_0) = o(t^2)$$

pour  $t$  voisin de 0 et le signe de cette différence ne peut être déduit de la formule de Taylor-Young à l'ordre deux.

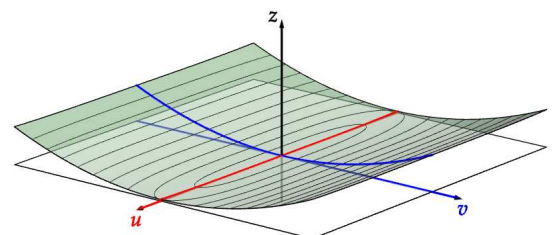
6.a Pour  $f(M_0 + h) = h_v^2$ , la fonction  $f$  passe par un minimum en  $M_0$ , mais ce minimum n'est pas strict.



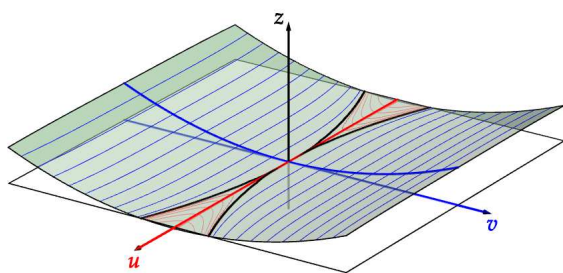
6.b Pour  $f(h) = h_v^2 + h_u^3$ , la fonction  $f$  ne passe pas par un minimum en  $M_0$ , mais l'allure du graphe (une *fronce*) n'est pas celle d'un col pour autant.



6.c Pour  $f(h) = h_v^2 + h_u^4$ , la fonction  $f$  passe par un minimum local strict en  $M_0$ , comme dans le cas où les deux valeurs propres de la hessienne sont strictement positives.



6.d Pour  $f(h) = h_v^2 - h_u^4$ , la fonction  $f$  passe par un col en  $M_0$ , comme dans le cas où la hessienne possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. →[16]



21.4 Les notations de Monge sont :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0).$$

21.5 → Soit  $M_0 \in U$ , un point critique de  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ .

1. Si  $\det H_f(M_0) = rt - s^2 > 0$ , alors  $f$  atteint un extremum local strict en  $M_0$ . Il s'agit d'un minimum pour  $\text{tr } H_f(M_0) > 0$  et d'un maximum pour  $\text{tr } H_f(M_0) < 0$ .

2. Si  $\det H_f(M_0) < 0$ , alors la fonction  $f$  ne passe pas par un extremum local en  $M_0$ .

**22. Exemples**

22.1 La fonction  $[(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy]$  n'est ni majorée, ni minorée sur  $\mathbb{R}^2$ . Elle admet deux points critiques :  $M_0 = (0, 0)$  et  $M_1 = (1, 1)$ . Elle atteint un minimum local strict en  $M_1$ . La valeur en  $M_0$  n'est pas un extremum local.

22.2 Suite de [10.1] – La fonction  $f$  admet trois points critiques :  $M_{-1} = (-1, -1)$ ,  $M_0 = (0, 0)$  et  $M_1 = (1, 1)$ . Elle atteint son minimum global en  $M_{-1}$  et en  $M_1$ . La valeur  $f(M_0)$  n'est pas un extremum local.

22.3 La fonction  $f = [(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y]$  admet  $M_0 = (-2, 2)$  pour seul point critique. Elle atteint son minimum absolu en  $M_0$ . →[93]

22.4 Suite de [10.2] – La fonction  $f$  admet trois points critiques :  $M_0 = (0, 0)$ ,  $M_1 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et  $M'_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . La valeur  $f(M_0)$  n'est pas un extremum local. La fonction  $f$  atteint son minimum absolu en  $M_1$  et en  $M'_1$ .

22.5 La fonction  $f = [(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3]$  n'est ni majorée, ni minorée sur  $\mathbb{R}^2$ . Elle admet deux points critiques :  $M_0 = (0, 0)$  et  $M_1 = (2/3, 0)$ . Elle passe par un minimum local strict en  $M_0$  ; la valeur  $f(M_1)$  n'est pas un extremum local.

**Entraînement**

23. Suite de [10.4] –

1. La fonction  $f_1$  admet le point  $(1, 1)$  pour unique point critique et atteint son minimum absolu en ce point.

2. La fonction  $f_4$  admet le point  $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$  pour unique point critique.

3. Les fonctions  $f_2$  et  $f_3$  admettent chacune un unique point critique, situé sur la droite  $[y = x]$ .

24. La fonction  $f = [(x, y) \mapsto xy - x^2y + xy^2]$  n'est ni majoré, ni minorée sur  $\mathbb{R}^2$ . Elle admet quatre points critiques :

$$M_0 = (0, 0), \quad M_1 = (0, -1), \quad M_2 = (1, 0), \quad M_3 = (1/3, -1/3).$$

La fonction  $f$  passe par un minimum local strict en  $M_3$ . Elle ne passe pas par un extremum local aux autres points critiques.

25. Suite de [7.4] – Quels que soient  $a > 0, b > 0$  et  $c > 0$ , la fonction  $g$  définie par

$$\forall (x, y) \in K, \quad g(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$$

atteint un maximum absolu sur  $K$  au point

$$(x, y) = \left( \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c} \right)$$

et atteint son minimum absolu en chaque point du bord de  $K$ .

26. La fonction  $f$  définie par

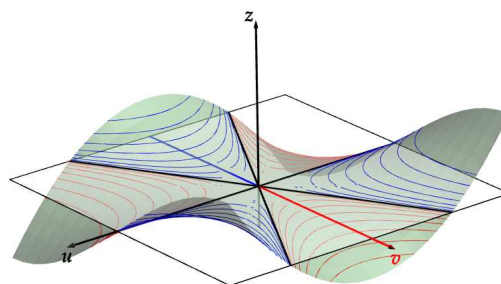
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = xyz + xy + yz$$

n'atteint aucun extremum sur  $\mathbb{R}^3$  car la trace de sa hessienne est nulle en tout point.

27. Au voisinage de l'origine, le graphe de la fonction

$$f = [(x, y) \mapsto 2x^2y - y^3]$$

ne ressemble à aucun des cas répertoriés au [21.3]. Expliquer.



**III**

**Extrema globaux**

**III.1 Extremum d'un polynôme quadratique**

28. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y.$$

1. Il existe une matrice symétrique et inversible  $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  et une matrice colonne  $B \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  telles que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \frac{1}{2} X^T \cdot S \cdot X - B^T \cdot X.$$

2. Quelles que soient  $X_0$  et  $H$  dans  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ ,

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + (X_0^T \cdot S - B^T)H + \frac{1}{2} H^T \cdot S \cdot H.$$

On choisit  $X_0 = S^{-1}B$ . Pourquoi ?

3. Soit  $\Delta = \text{Diag}(3, 1)$ . Il existe une matrice orthogonale  $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  telle que  $P^T \cdot S \cdot P = \Delta$ .

4. Pour tout  $H \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  non nul,

$$H^T \cdot S \cdot H = H^T \cdot P \cdot \Delta \cdot P^T \cdot H \geq H^T \cdot P \cdot P^T \cdot H = H^T \cdot H > 0.$$

5. La fonction  $f$  atteint son minimum global strict en  $X_0$  et n'est pas majorée sur  $\mathbb{R}^2$ . →[93]

**III.2 Convexité**

29. Alors que l'étude au second ordre est une étude locale, la convexité permet d'établir des inégalités globales.

30. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe, alors

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

quels que soient les réels  $x_1, \dots, x_n$  dans  $I$ .

**31. Cas d'égalité**

31.1 Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et s'il existe  $0 < t_0 < 1$  tel que

$$f((1 - t_0)x + t_0y) = (1 - t_0)f(x) + t_0f(y),$$

alors

$$\forall 0 < t < 1, \quad f((1 - t)x + ty) = (1 - t)f(x) + tf(y).$$

En particulier, si  $x \neq y$ , alors la restriction de  $f$  à  $[x \leftrightarrow y]$  est affine.

31.2  $\Leftrightarrow$  Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **strictement convexe** lorsque, quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $I$ ,

$$\forall 0 < t < 1, \quad f((1 - t)x + ty) < (1 - t)f(x) + tf(y).$$

31.3 Si  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  et si  $f''(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est strictement convexe.

31.4 Soit  $f$ , une fonction strictement convexe. Pour tout entier  $n \geq 2$  et toute famille  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  d'éléments de  $I$ , s'il existe des réels strictement positifs  $t_1, \dots, t_n$  tels que

$$\sum_{k=1}^n t_k = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n t_k f(x_k),$$

alors  $x_1 = \dots = x_n$ .

**Applications**

32. L'expression définie sur  $]0, 1[^n \cap [x_1 + \dots + x_n = 1]$  par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k}$$

atteint son minimum absolu en  $x_1 = \dots = x_n = 1/n$ .

33. Soient  $a, b$  et  $c$ , les longueurs des côtés d'un triangle. Alors

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3$$

avec égalité si, et seulement si, le triangle est équilatéral.

**34. Entropie d'une variable aléatoire discrète**

Soit  $(p_1, \dots, p_n)$ , une famille de réels strictement positifs dont la somme est égale à 1. L'**entropie** de cette famille, définie par

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k,$$

est maximale pour  $p_1 = \dots = p_n = 1/n$ .

**35. Inégalité arithmético-géométrique**

35.1 La fonction  $-\ln$  est strictement convexe sur  $]0, +\infty[$ .

35.2 \* Quels que soient les réels strictement positifs  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

avec égalité si, et seulement si,  $x_1 = \dots = x_n$ .

35.3 La fonction définie par  $g(x, y, z) = (xyz)^3$  sur le compact  $K = (\mathbb{R}_+)^3 \cap [x + y + z = 1]$  admet 0 pour minimum et atteint son maximum en  $x = y = z = 1/3$ .

35.4 La fonction définie par  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sur le fermé  $[x^2 y^2 z^2 = 1]$  n'est pas majorée. Elle atteint son minimum aux points  $(x, y, z)$  tels que  $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ .

35.5 Soit  $(p_1, \dots, p_n) \in (]0, 1[)^n$ , des réels dont le produit est égal à  $2^{-n}$ . Les sommes

$$\sum_{k=1}^n p_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{1 - p_k}$$

sont minimales pour  $p_1 = \dots = p_n = 1/2$ .

**III.3 Méthode des crêtes**

36. La méthode des crêtes ramène la recherche des extrema globaux d'une fonction de 2 variables à l'étude des extrema de 2 fonctions d'une variable.

36.1 Soit  $K = [a, b] \times [c, d]$ . Si  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors les fonctions  $m$  et  $M$  définies par

$$m(x) = \min_{c \leq y \leq d} f(x, y) \quad \text{et} \quad M(x) = \max_{c \leq y \leq d} f(x, y)$$

sont continues sur  $[a, b]$  et

$$\min_{(x,y) \in K} f(x, y) = \min_{a \leq x \leq b} m(x) \quad \text{et} \quad \max_{(x,y) \in K} f(x, y) = \max_{a \leq x \leq b} M(x).$$

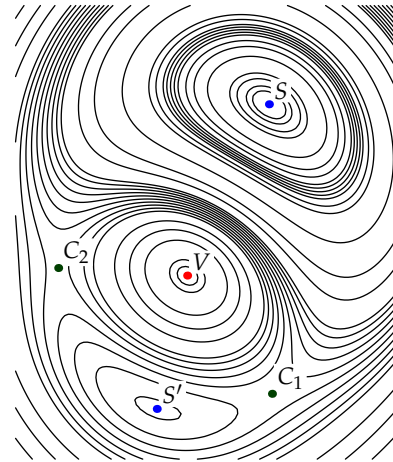
36.2 Si  $\Omega$  est l'image de  $[a, b] \times [c, d]$  par une fonction  $\varphi$ , alors

$$\min_{M \in \Omega} f(M) = \min_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} (f \circ \varphi)(u, v)$$

$$\max_{M \in \Omega} f(M) = \max_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} (f \circ \varphi)(u, v)$$

et la méthode des crêtes peut s'appliquer à la fonction  $(f \circ \varphi)$ .

37. On considère une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un rectangle  $U = ]a, b[ \times ]c, d[$ .



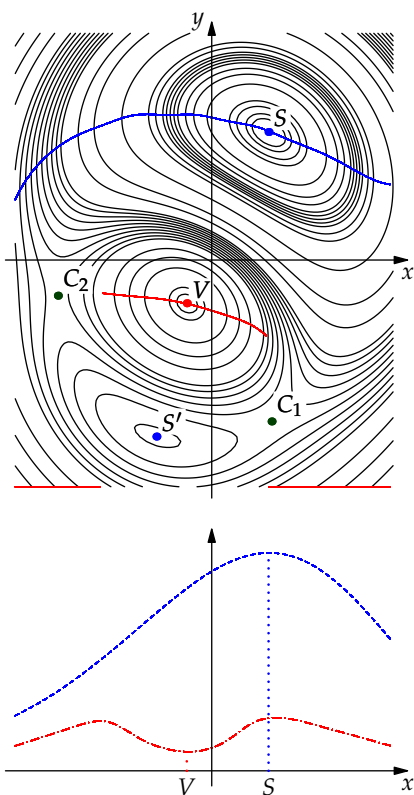
On voit sur ses courbes de niveau que cette fonction admet cinq points critiques :

- Elle atteint son maximum global en  $S$ .
- Elle passe par un maximum local en  $S'$ .
- Elle atteint son minimum global en  $V$ .
- En deux autres points critiques  $C_1$  et  $C_2$ , elle n'atteint ni maximum local, ni minimum local.

**37.1** Pour chaque valeur de  $x_0 \in ]a, b[$ , on cherche les valeurs extrêmes de la fonction

$$[y \mapsto f(x_0, y)]$$

sur  $]c, d[$ . Le minimum est atteint en  $y_m = \varphi_m(x_0)$  (courbe rouge) et le maximum en  $y_M = \varphi_M(x_0)$  (courbe bleue).



En étudiant  $f$  le long de ces deux courbes, c'est-à-dire en étudiant

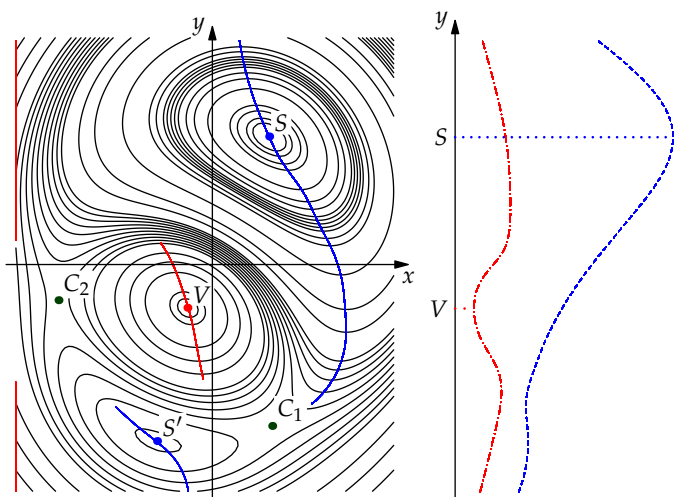
$$[x \mapsto f(x, \varphi_m(x))] \quad \text{et} \quad [x \mapsto f(x, \varphi_M(x))]$$

on peut situer les abscisses des points  $S$  (*maximum maximorum*) et  $V$  (*minimum minimorum*).

**37.2** De manière analogue, on peut aussi, pour chaque valeur de  $y_0 \in ]c, d[$ , chercher les valeurs extrêmes de la fonction

$$[x \mapsto f(x, y_0)]$$

sur  $]a, b[$ . Le minimum est atteint en  $x_m = \psi_m(y_0)$  (courbe rouge) et le maximum en  $x_M = \psi_M(y_0)$  (courbe bleue).



En étudiant  $f$  le long de ces deux courbes, c'est-à-dire en étudiant

$$[y \mapsto f(\psi_m(y), y)] \quad \text{et} \quad [y \mapsto f(\psi_M(y), y)]$$

on peut situer les ordonnées des points  $S$  et  $V$ .

**38. Exemples**

**38.1** La fonction  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad f(x, y) = x^4 y^2 + \ln(1 + y^4)$$

est bornée et atteint ses bornes.

Les points critiques de  $f$  sont  $(x, 0)$  pour  $x \in [-1, 1]$ .

Pour tout  $y \in [-1, 1]$ , elle atteint son minimum en  $x = 0$  et son maximum en  $x = \pm 1$ .

$$\min_{x \in [-1, 1]} f(x, y) = \ln(1 + y^4)$$

$$\max_{x \in [-1, 1]} f(x, y) = y^2 + \ln(1 + y^4)$$

Le minimum de  $f$  est donc 0, valeur prise en  $(0, 0)$ . Son maximum est égal à  $1 + \ln 2$ , valeur prise en  $(\pm 1, \pm 1)$ .

**38.2** On étudie la fonction  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \in T, \quad f(x, y) = xy\sqrt{1-x-y}$$

où  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : 1 - x - y \geq 0\}$ .

1. La fonction  $f$  est positive sur  $T$  et nulle sur le bord de  $T$ .
2. La fonction  $f$  atteint son maximum en un point critique de l'intérieur de  $T$ .

L'unique point critique de  $f$  situé à l'intérieur de  $T$  a pour coordonnées  $(2/5, 2/5)$  et le maximum de  $f$  est égal à  $4\sqrt{5}/125$ .

3. Pour chaque  $x \in [0, 1]$ , en restriction à  $[0, 1 - x]$ , la fonction  $[y \mapsto f(x, y)]$  passe par un maximum en

$$\varphi_M(x) = \frac{2}{3}(1 - x).$$

Sur  $[0, 1]$ , la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = f(x, \varphi_M(x)) = \frac{2}{3\sqrt{3}}x(1-x)^{3/2}$$

atteint son maximum en  $x = 2/5$ .

**Applications**

**39.1** La fonction  $f$  définie sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  par

$$f = [(x, y) \mapsto 2xy^2 + \ln(4 + y^2)]$$

atteint un minimum absolu en  $(0, 0)$ .

**39.2** Suite de [10.5] – Le minimum absolu de  $f$  sur  $A$  est atteint en  $(x, y) = (a, b)$ .

**39.3** Suite de [10.4] – La méthode des crêtes s'applique aux fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$ .

**40. Utilisation des coordonnées polaires**

**40.1** La fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

est bornée sur  $D = [x^2 + y^2 \leq 9]$  et atteint ses bornes. Son maximum est égal à 11.

**40.2** Suite de [10.3] – Le maximum absolu de  $f$  est égal à  $1/\sqrt{e}$ . Le minimum absolu s'en déduit par symétrie.

**40.3** Suite de [7.2] – Le maximum absolu de  $f$  est égal à 2; le minimum absolu est nul.

**40.4** Suite de [7.3] – Le maximum absolu de  $f$  est égal à 20; le minimum absolu est égal à -12.

**40.5** Suite de [7.1] – Le maximum absolu de  $f$  est égal à 1; le minimum absolu s'en déduit par symétrie.

**41. Autres changements de variables**

**41.1** On peut trouver les extrema de  $e^{x+t} - 2(x+t) + (x-t)^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  en posant  $u = x+t$  et  $v = x-t$ .

**41.2** L'étude de  $x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}^2$  conduit naturellement à poser  $u = y - x/2$  et  $v = x$ .

**41.3** Étudier les extrema de  $f(x, y) = (xy)^\alpha + \beta xy$  en fonction de  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

**IV**

**Introduction à la géométrie différentielle**

**IV.1 Arcs paramétrés**

**42.** Soit  $E$ , un espace vectoriel de dimension finie.

**42.1** Un arc paramétré est un couple  $(I, f)$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle et  $f$ , une fonction de  $I$  dans  $E$ .

Les réels  $t \in I$  sont appelés **paramètres**.

**42.2** L'image d'un arc paramétré

$$\Gamma = \{f(t), t \in I\}$$

est une partie de  $E$  considérée comme une *courbe*. Une courbe qui est contenue dans un plan est dite *courbe plane*. Une courbe qui n'est pas plane est dite *courbe gauche*.

**42.3 Interprétation cinématique**

Un couple  $(I, \gamma)$  est compris comme le mouvement d'un point matériel au cours du temps.

L'ensemble

$$\Gamma = \{\gamma(t), t \in I\}$$

des positions occupées par ce point matériel, c'est-à-dire la *trajectoire* de ce point, est une courbe tracée sur l'ensemble  $X$  et le vecteur  $\gamma'(t_0)$  est le *vecteur vitesse* à l'instant  $t_0 \in I$ .

**43. Exemple fondamental**

Soient  $v \neq 0_E$  et  $M_0 \in E$ . L'arc paramétré  $(\mathbb{R}, \delta)$  défini par

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \delta(h) = M_0 + h \cdot v$$

décrit un mouvement rectiligne uniforme. Son image

$$\Delta = \{\delta(h), h \in \mathbb{R}\} = M_0 + \mathbb{R} \cdot v$$

est la droite dirigée par le vecteur  $v$  et qui passe par le point  $M_0$ .

**44.** Soit  $(I, f)$ , un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  : la fonction  $f$  est continûment dérivable sur  $I$ .

**44.1** Pour tout  $t_0 \in I$ ,

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h)$$

lorsque  $h$  tend vers 0.

**44.2** Le réel  $t_0 \in I$  est un **paramètre régulier** lorsque le vecteur  $f'(t_0) \in E$  n'est pas nul.

**44.3** Si  $t_0$  est un paramètre régulier, lorsque  $t$  est voisin de  $t_0$ , le mouvement décrit par  $\gamma$  est proche du mouvement rectiligne [43] avec  $v = f'(t_0)$ .

Localement, la courbe  $\Gamma$  ressemble donc à une droite.

**44.4** Si  $t_0 \in I$  est un paramètre régulier de l'arc paramétré  $(I, f)$ , la **tangente** à la courbe  $\Gamma$  au point  $M_0 = f(t_0)$  est la droite issue du point  $M_0$  et dirigée par le vecteur  $f'(t_0) \in E$ .

**44.5** Si  $t_0 \in I$  n'est pas un paramètre régulier, on dit alors que  $f(t_0)$  est un **point stationnaire**.

Au voisinage d'un point stationnaire, la courbe  $\Gamma$  peut ne pas ressembler à une droite. →[45.4]

**45. Dérivée le long d'un arc**

Soit  $f : U \rightarrow F$ , une fonction différentiable sur l'ouvert  $U$  et  $\gamma : I \rightarrow U$ , une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ , à valeurs dans  $U$ .

L'étude de la composée  $g = f \circ \gamma$  décrit le comportement de la fonction  $f$  le long de la courbe paramétrée par  $\gamma$ .

**45.1** Soient  $M_0 \in U$  et  $h \in E$  : comme  $U$  est ouvert, il existe un intervalle  $I = ]-\alpha, \alpha[$  tel que

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) = M_0 + t \cdot h \in U$$

et  $(f \circ \gamma)'(0)$  est la dérivée de  $f$  en  $M_0$  selon  $h$  [16.23].

**45.2** → La composée  $f \circ \gamma : I \rightarrow F$  est dérivable et

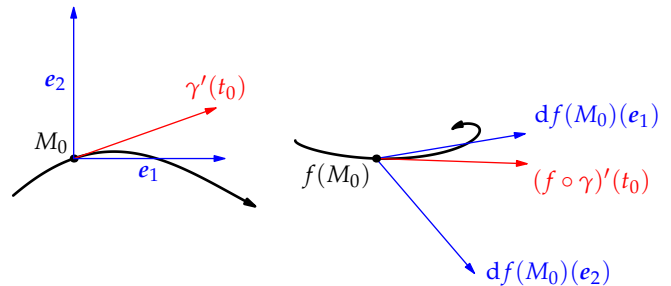
$$\forall t_0 \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = [df(\gamma(t_0))](\gamma'(t_0)).$$

**45.3** Si le vecteur  $\gamma'(t_0) \in E$  n'est pas nul, alors il dirige la tangente au point  $M_0 = \gamma(t_0)$  à la courbe paramétrée par  $\gamma$ .

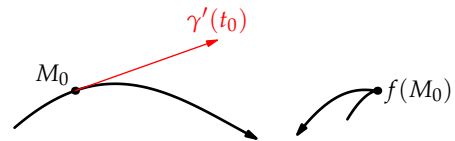
Si de plus il n'appartient pas au noyau de l'application linéaire tangente  $df(M_0)$ , alors son image

$$df(M_0)(\gamma'(t_0)) \in F$$

dirige la tangente au point  $N_0 = f(M_0)$  à la courbe paramétrée par  $f \circ \gamma$ .



**45.4** Si  $\gamma'(t_0)$  appartient au noyau de  $df(M_0)$ , il se peut que la courbe paramétrée par  $f \circ \gamma$  n'ait pas de tangente au point  $N_0$ .



**46. Caractérisation des fonctions constantes**

Soit  $f : U \rightarrow F$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ , deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**46.1** Si  $\gamma(0) = a \in U$  et  $\gamma(1) = b \in U$ , alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

**46.2** → Soient  $U$ , un ouvert convexe et  $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ . L'application  $f$  est constante si, et seulement si, l'application linéaire tangente  $df(M)$  est l'application nulle pour tout  $M \in U$ .

**46.3** Soit  $U$ , un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux applications différentiables sur  $U$  telles que

$$\forall M \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial x}(M) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial g}{\partial y}(M),$$

alors  $f - g$  est constante sur  $U$ .

**IV.2 Vecteurs tangents**

**47.** Soit  $X$ , une partie d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie. On définit la notion de **vecteur tangent** en traçant des courbes sur  $X$ .

**47.1** Un vecteur  $v \in E$  est **tangent à  $X$  au point  $M_0 \in X$**  lorsqu'il existe une fonction  $\gamma$  définie sur un voisinage  $I$  de 0 telle que

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) \in X, \quad \gamma(0) = M_0 \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  au point  $M_0$  est noté  $T_{M_0}X$ .

**47.2** L'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  au point  $M_0$  est un **cône** : si le vecteur  $v$  est tangent à  $X$  au point  $M_0$ , alors  $\lambda \cdot v$  est tangent à  $X$  au point  $M_0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



47.3 En général, si  $X$  est une courbe (resp. une surface), alors l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en un point  $M_0 \in X$  est une droite (resp. un plan).

Dans certains cas néanmoins, l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en un point  $M_0$  n'est pas un sous-espace vectoriel. →[49.2]

48. → **Condition nécessaire de tangence**

Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction différentiable sur l'ouvert  $U \in E$  et  $M_0 \in U$ , un point de l'ensemble

$$X = [f(M) = \lambda] \subset U.$$

Si le vecteur  $v \in E$  est tangent à  $X$  au point  $M_0$ , alors

$$df(M_0)(v) = 0.$$

**Exemples**

49. **Vecteurs tangents à un arc paramétré**

Soit  $(I, f)$ , un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ .

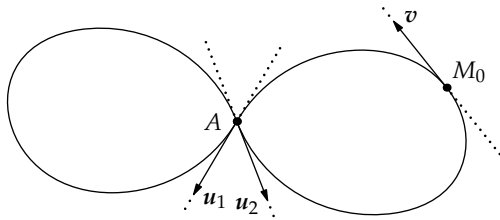
49.1 Les vecteurs proportionnels à  $f'(t_0)$  sont tangents à la courbe  $\Gamma$  au point  $M_0 = f(t_0)$ .

49.2 **Point double**

S'il existe deux paramètres  $t_0$  et  $t_1$  tels que

$$M_0 = f(t_0) = f(t_1),$$

alors la courbe  $\Gamma$  peut avoir deux tangentes distinctes au point  $M_0$ . Dans ce cas, l'ensemble des vecteurs tangents au point  $M_0$  n'est pas un sous-espace vectoriel.



50. **Plan affine**

On considère un plan affine de  $\mathbb{R}^3$  :

$$X = [ax + by + cz = d].$$

50.1 La direction du plan affine  $X$  est le plan vectoriel

$$P = [ax + by + cz = 0].$$

50.2 Pour tout vecteur  $v = (x_0, y_0, z_0) \in P$ , la droite affine

$$M_0 + \mathbb{R} \cdot v$$

est contenue dans le plan  $X$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = M_0 + t \cdot v \in X.$$

50.3 → En chaque point  $M_0$  du plan  $X$ , l'ensemble  $T_{M_0}X$  des vecteurs tangents est la direction de  $X$ .

51. **Sphère**

On considère une sphère d'un espace euclidien  $E$  :

$$X = \{M \in E : \|AM\| = r\}$$

de rayon  $r > 0$  et un point  $M_0 \in X$ .

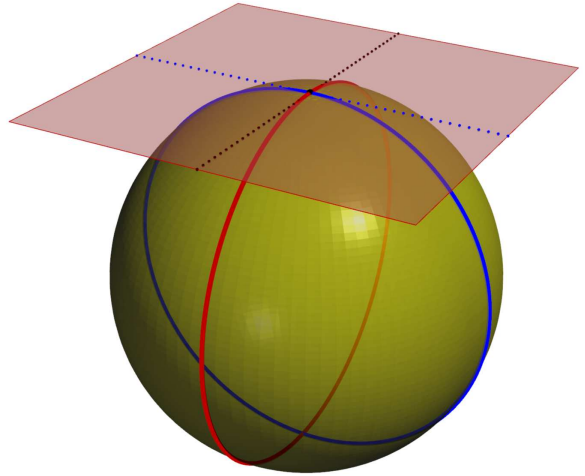
51.1 Pour tout vecteur  $u$  de norme  $r$  orthogonal au vecteur  $AM_0$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le point

$$\gamma(t) = A + \cos \omega t \cdot AM_0 + \sin \omega t \cdot u$$

appartient à la sphère  $X$ .

51.2 → En chaque point  $M_0 \in X$ , l'ensemble  $T_{M_0}X$  est l'hyperplan

$$(\mathbb{R} \cdot AM_0)^\perp.$$



52. **Graphes d'une fonction**

On considère le graphe d'une fonction  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$  :

$$X = \{(x, y, g(x, y)), (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

et un point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $X$ .

52.1 Pour tout vecteur  $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  assez proche de 0, le point

$$\gamma(t) = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, g(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta))$$

appartient à  $X$ .

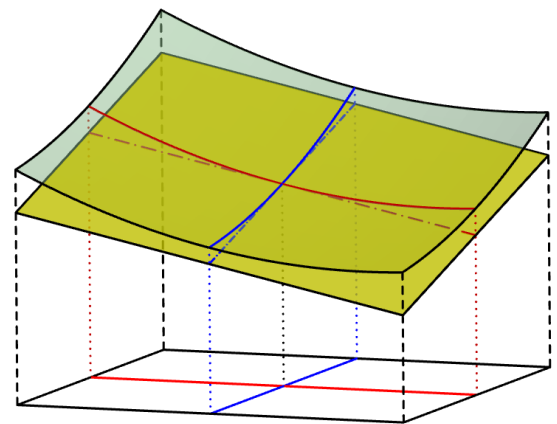
52.2 → En chaque point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$ , l'ensemble  $T_{M_0}X$  est le plan

$$\text{Vect}\left(\left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(M_0)\right), \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}(M_0)\right)\right).$$

L'équation cartésienne

$$(x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(M_0) - (z - z_0) = 0$$

représente le plan affine  $M_0 + T_{M_0}X$ .



**IV.3 Lignes et surfaces de niveau**

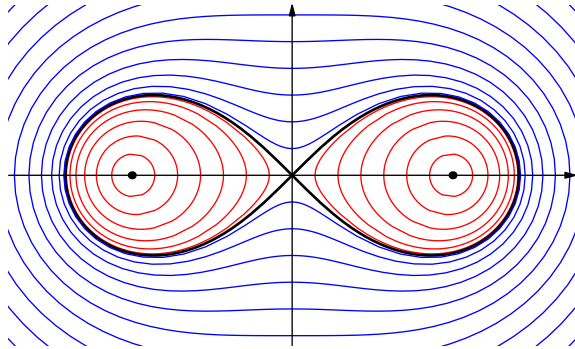
53. Soient  $\Omega$ , un ouvert de l'espace  $E = \mathbb{R}^d$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une application.

53.1  $\Leftrightarrow$  Les **lignes de niveau** (pour  $d = 2$ ) ou les **surfaces de niveau** (pour  $d \geq 3$ ) de  $f$  sont les parties de  $\Omega$  définies par

$$[f(M) = \lambda]$$

lorsque  $\lambda$  parcourt  $\mathbb{R}$ .

53.2 Les lignes (ou surfaces) de niveau de  $f$  constituent une partition de  $\Omega$ .



**54. Hyperplan tangent [48]**

Soient  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , et

$$X = [g(M) = 0],$$

une ligne (ou une surface) de niveau de  $g$ .

54.1  $\Leftrightarrow$  Un point  $M_0$  de la ligne (ou surface) de niveau  $X$  est dit **régulier** lorsque la forme linéaire  $dg(M_0)$  est surjective.

54.2 Une forme linéaire sur  $E = \mathbb{R}^d$  est surjective si, et seulement si, elle n'est pas identiquement nulle. Dans ce cas, son noyau est un hyperplan de  $E$ .

54.3  $\rightarrow$  (Admis)

Si  $M_0 \in X$  et si la forme linéaire tangente  $dg(M_0)$  est surjective, alors l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  au point  $M_0$  est l'hyperplan

$$T_{M_0}X = \text{Ker } dg(M_0).$$

**Interprétation euclidienne**

55. On suppose que l'espace  $E$  est muni d'une structure euclidienne et on étudie les lignes (ou les surfaces) de niveau d'une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

55.1 Pour tout point  $M_0$  de  $\Omega$ ,

$$\forall v \in E, \quad dg(M_0)(v) = D_v g(M_0) = \langle \nabla g(M_0) | v \rangle.$$

55.2 La forme linéaire tangente  $dg(M_0)$  est surjective si, et seulement si, le gradient de  $g$  en  $M_0$  n'est pas nul.

$$\text{rg } dg(M_0) = 1 \iff \nabla g(M_0) \neq \mathbf{0}_E$$

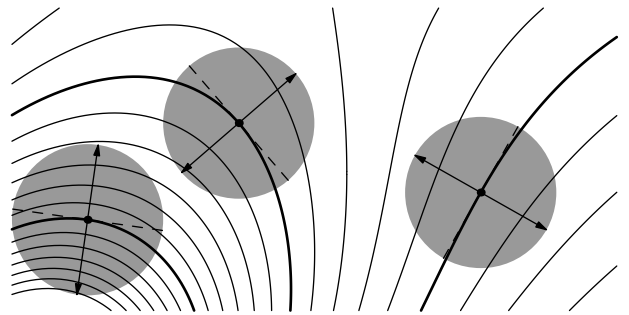
55.3 Soit  $M_0$ , un point de la ligne (ou surface) de niveau

$$X_\alpha = [g(M) = \alpha].$$

Si  $\nabla g(M_0) \neq \mathbf{0}_E$ , alors [48] les vecteurs tangents à  $X_\alpha$  au point  $M_0$  sont orthogonaux au gradient  $\nabla g(M_0)$  et plus précisément [54] l'hyperplan tangent à  $X_\alpha$  en  $M_0$  est l'orthogonal du gradient de  $g$ .

$$T_{M_0}X = (\mathbb{R} \cdot \nabla g(M_0))^\perp$$

55.4 En chacun de leurs points, les lignes (ou surfaces) de niveau de la fonction  $g$  sont orthogonales au gradient de  $g$ .



**56. Ligne de plus grande pente**

Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

56.1  $\rightarrow$  Si  $h$  est unitaire, la dérivée de  $g$  en  $M_0$  selon  $h$

$$D_h g(M_0) = \langle \nabla g(M_0) | h \rangle$$

est maximale si, et seulement si,  $h$  est colinéaire à  $\nabla g(M_0)$ .

56.2 Dans la direction du gradient, la fonction  $g$  varie rapidement et les lignes de niveau de cette fonction sont très serrées.

56.3 Si le déplacement  $h$  est assez petit et orthogonal au gradient  $\nabla g(M_0)$ , alors la dérivée de  $g$  selon  $h$  est nulle :

$$g(M_0 + h) = g(M_0) + \langle \nabla g(M_0) | h \rangle + o(h) = g(M_0) + o(h).$$

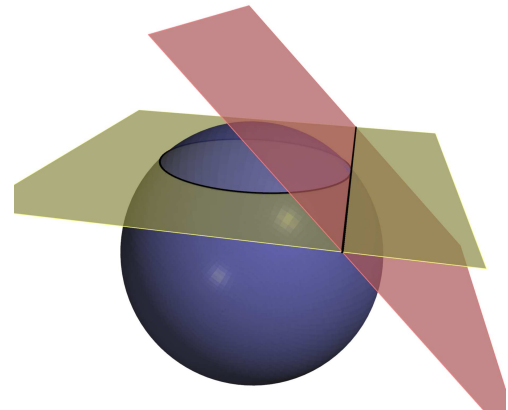
Par conséquent, dans une direction orthogonale au gradient, la fonction  $g$  varie très lentement.

**IV.4 Intersections de deux surfaces**

57. En général, l'intersection de deux plans est une droite et, de même, l'intersection de deux surfaces est une courbe.

**58. Sphère et plan**

On considère un cercle  $\Gamma$  défini comme l'intersection d'une sphère  $\Sigma$  et d'un plan  $\Pi$ .



58.1 Soit  $M_0 \in \Gamma = \Sigma \cap \Pi$ .

Comme tous les points de la sphère  $\Sigma$  sont réguliers [54.1], il existe un plan  $T_{M_0}\Sigma$  tangent à la sphère au point  $M_0$ . Comme  $\Pi$  est un plan affine,  $\rightarrow$ [50]

$$\Pi = M_0 + T_{M_0}\Pi.$$

58.2 En général,  $T_{M_0}\Sigma \neq \Pi$  et l'intersection des deux plans affines

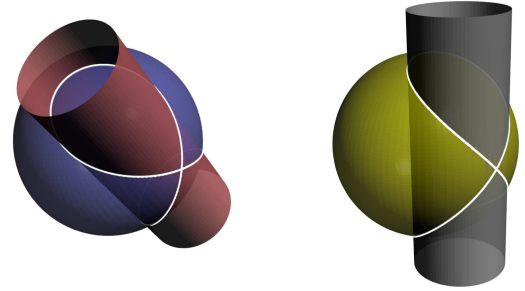
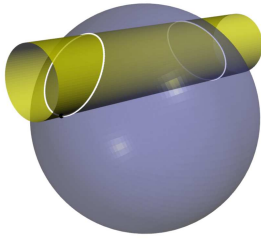
$$(M_0 + T_{M_0}\Sigma) \cap (M_0 + T_{M_0}\Pi)$$

est une droite, la tangente au cercle  $\Gamma$  au point  $M_0$ .

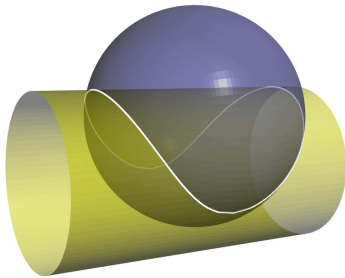
**59. Sphère et cylindre**

On considère la courbe  $\Gamma$  définie comme l'intersection d'une sphère  $\Sigma_1$  et d'un cylindre de révolution  $\Sigma_2$ .

59.1 Si le rayon du cylindre est assez petit, la courbe  $\Gamma$  est en deux morceaux.



59.2 Si le rayon du cylindre est plus gros, la courbe n'a qu'une seule composante connexe.



En un point de cette courbe, la sphère et le cylindre ont le même plan tangent :

$$M_0 + T_{M_0}\Sigma_1 = M_0 + T_{M_0}\Sigma_2.$$

L'intersection des deux plans affines n'est donc pas une droite et on constate qu'en ce point particulier, la courbe admet deux tangentes.

**Tangentes à une courbe**

60. On considère une courbe  $\Gamma$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , intersection de deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  définies comme des surfaces de niveau

$$\Sigma_1 = [g_1(M) = 0] \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = [g_2(M) = 0]$$

où les fonctions numériques  $g_1$  et  $g_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ .

On s'intéresse à l'allure locale de cette courbe  $\Gamma$  et en particulier aux vecteurs tangents à  $\Gamma$  en un point donné  $M_0$ .

61. La fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall M \in U, \quad f(M) = (g_1(M), g_2(M))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et, en tout point  $M$  de  $U$ ,

$$\forall h \in \mathbb{R}^3, \quad df(M)(h) = (dg_1(M)(h), dg_2(M)(h)).$$

62. On suppose que  $M_0$  est un point régulier [54.1] pour  $\Sigma_1$  et pour  $\Sigma_2$  : les formes linéaires  $dg_1(M_0)$  et  $dg_2(M_0)$  sont surjectives.

62.1 Comme les formes linéaires  $dg_1(M_0)$  et  $dg_2(M_0)$  ne sont pas identiquement nulles, l'application linéaire tangente

$$df(M_0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

n'est pas identiquement nulle. Son rang est donc égal à 1 ou à 2.

62.2 Le rang de  $df(M_0)$  est égal à 1 si, et seulement si, les deux formes linéaires  $dg_1(M_0)$  et  $dg_2(M_0)$  sont proportionnelles, c'est-à-dire si

$$T_{M_0}\Sigma_1 = T_{M_0}\Sigma_2.$$

Autrement dit, l'application linéaire tangente  $df(M_0)$  est surjective si, et seulement si, les plans tangents  $T_{M_0}\Sigma_1$  et  $T_{M_0}\Sigma_2$  sont distincts : on dit dans ce cas que les deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont *transverses*.

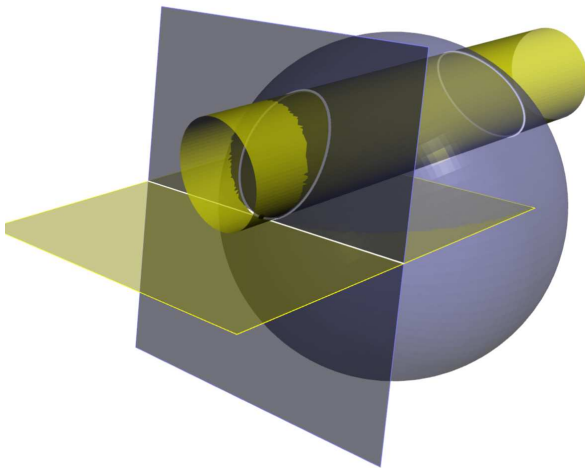
62.3 Si les deux plans tangents  $T_{M_0}\Sigma_1$  et  $T_{M_0}\Sigma_2$  sont distincts, alors le noyau de l'application linéaire tangente  $df(M_0)$  est une droite vectorielle :

$$\text{Ker } df(M_0) = (T_{M_0}\Sigma_1) \cap (T_{M_0}\Sigma_2).$$

Tous les vecteurs de cette droite sont des vecteurs tangents en  $M_0$  à la courbe  $\Gamma$ .

63. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ .

59.3 En un point  $M_0$  de  $\Gamma$ , la sphère  $\Sigma_1$  et le cylindre  $\Sigma_2$  admettent chacun un plan tangent et, en général, ces plans sont distincts. On dit alors que les deux surfaces sont *transverses*.



59.4 L'intersection des deux plans affines

$$(M_0 + T_{M_0}\Sigma_1) \cap (M_0 + T_{M_0}\Sigma_2)$$

est alors une droite, qui est la tangente à la courbe  $\Gamma$  en  $M_0$ .

**59.5 La fenêtre de Viviani**

Lorsque le cylindre est tangent à la sphère, la courbe  $\Gamma$  est assez particulière.

63.1  $\Leftrightarrow$  Un point  $M_0$  de la ligne de niveau

$$X = [f(M) = (0, 0)]$$

est **régulier\*** si, et seulement si, l'application linéaire tangente

$$df(M_0) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

est surjective.

63.2 \* Si  $M_0$  est un point régulier de la ligne de niveau  $X = [f(M) = 0]$ , alors l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $M_0$  est une droite vectorielle :

$$T_{M_0}\Gamma = \text{Ker } df(M_0),$$

ce qui permet de considérer  $X$  comme une courbe.

#### 64. Interprétation euclidienne

Si on munit  $\mathbb{R}^3$  d'une structure euclidienne, on peut traduire ce qui précède en termes de gradient.

64.1 Les plans tangents  $T_{M_0}\Sigma_1$  et  $T_{M_0}\Sigma_2$  sont distincts si, et seulement si, les vecteurs  $\nabla g_1(M_0)$  et  $\nabla g_2(M_0)$  ne sont pas colinéaires.

64.2 Dans ce cas, la droite  $\text{Ker } df(M_0) = T_{M_0}\Sigma_1 \cap T_{M_0}\Sigma_2$  est dirigée par le vecteur

$$\nabla g_1(M_0) \wedge \nabla g_2(M_0).$$

#### Entraînement

65. Suite de [52.2] –

1. Le plan tangent à  $\Sigma$  est horizontal si, et seulement si, le gradient de  $f$  est nul.
2. Ce plan tangent peut-il être vertical ?

66. Une courbe plane  $\Gamma$  est représentée d'une part comme une ligne de niveau d'une fonction différentiable  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et d'autre part comme l'image d'un arc paramétré  $(I, \gamma)$  où  $\gamma$  est une fonction dérivable de  $I$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\Gamma = [F(x, y) = 0] = \{\gamma(t), t \in I\}.$$

On suppose que  $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$  et que  $F(x_0, y_0) = 0$ . Comparer  $\gamma'(t_0)$  et les dérivées partielles  $F_x(x_0, y_0)$  et  $F_y(x_0, y_0)$ .

#### 67. Exemples de points stationnaires

67.1 L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$$

admet un point stationnaire pour  $t = 1$ .

67.2 La *cissoïde de Dioclès*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$$

admet  $O = f(0)$  pour seul point stationnaire.

67.3 La *tractrice*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(t - \text{th } t, \frac{1}{\text{ch } t}\right)$$

admet  $M_0 = f(0)$  pour seul point stationnaire.

67.4 La *cycloïde*, paramétrée par

$$\forall t \in [0, 2\pi], f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

admet  $M_0 = f(0)$  et  $M_{2\pi} = f(2\pi)$  pour seuls points stationnaires.

67.5 La *néphroïde* paramétrée par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], f(t) = (3 \sin t - \sin 3t, 3 \cos t - \cos 3t)$$

admet  $M_{-\pi} = f(-\pi)$ ,  $M_0 = f(0)$  et  $M_\pi = f(\pi)$  pour seuls points stationnaires.

#### 68. Calculs de tangentes

Pour calculer la tangente au point  $M_0 = f(t_0)$ , il est parfois plus efficace de calculer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $t_0$  de chacune des composantes de  $f$  que de dériver ces composantes.

68.1 Calculer la tangente à l'arc paramétré par

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t^2}, \frac{t^2}{1-t^2}\right)$$

au point  $f(0)$ .

68.2 L'arc paramétré par

$$\forall t \in ]-\pi, \pi[, f(t) = (\tan t/2 + \cos t, 1 - \sin t)$$

admet  $f(\pi/2)$  pour point stationnaire. Calculer la tangente au point  $f(0)$ .

68.3 Calculer la tangente à l'*astroïde* paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

au point  $M_0 = f(\pi/4)$ .

68.4 Calculer les tangentes au *folium*, paramétré par

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

aux points  $M_0 = f(0)$  et  $M_1 = f(1)$ .

68.5 Calculer les tangentes à la *lemniscate*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right)$$

aux points  $M_{-1} = f(-1)$ ,  $M_0 = f(0)$  et  $M_1 = f(1)$ .

68.6 Calculer les tangentes à la *strophoïde*, paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \left(\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

aux points  $M_{-1} = f(-1)$ ,  $M_0 = f(0)$  et  $M_1 = f(-1)$ .

68.7 L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\frac{t^3}{1-t^2}, \frac{t-2}{1-t^2}\right)$$

est un arc régulier. Calculer sa tangente au point  $M_0 = f(0)$ .

#### 69. Représentation implicite de la lemniscate

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = -x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2.$$

69.1 Comme  $f(x, y) \geq f(x, 0)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $f$  atteint son minimum global en  $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$ .

69.2 Pour  $\lambda \leq -1/4$ , les lignes de niveau

$$C_\lambda = [f(x, y) = \lambda]$$

ne sont pas des courbes.

69.3 Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la ligne de niveau  $C_\lambda$  admet les deux axes de coordonnées pour axes de symétrie.

69.4 La *lemniscate* est la ligne de niveau  $C_0$ .

1. L'origine  $O = (0, 0)$  appartient à  $C_0$ , mais n'est pas un point régulier de cette courbe [54.1]. Les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  sont tangents à  $C_0$  en  $O$ .  $\rightarrow$ [53.2]

2. Le point  $M_0 = (1, 0)$  appartient à  $C_0$ . La tangente à  $C_0$  en  $M_0$  est une droite verticale.

**70. Plan tangent à un cône**

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

et la surface de niveau

$$X = [f(x, y, z) = 0].$$

**70.1** Un point  $M = (x, y, z)$  appartient à  $X$  si, et seulement si, il existe un réel  $r \in \mathbb{R}$  et un angle  $\theta \in [-\pi, \pi]$  tels que

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r).$$

**70.2** Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$ . Si  $z_0 \neq 0$ , alors le vecteur

$$v = (x, y, z)$$

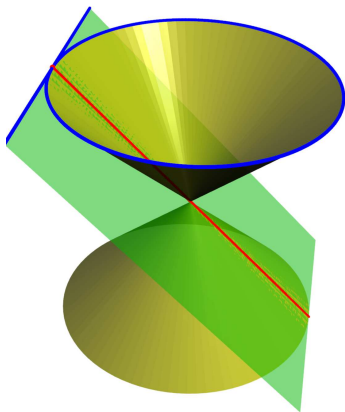
est tangent à  $X$  au point  $M_0$  si, et seulement si,

$$x_0x + y_0y - z_0z = 0.$$

L'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $M_0$  est donc le sous-espace

$$\text{Vect}(OM_0, (y_0, -x_0, 0)).$$

**70.3** L'origine est un point singulier [54.1] de  $X$ .



**71. Plan tangent à une quadrique**

On pourra retrouver l'allure des surfaces suivantes au [21.3].

**71.1** Le plan tangent en  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  au graphe de

$$f = [(x, y) \mapsto -17x^2 + 14xy - y^2 + 8x + 8y + 16]$$

est horizontal si, et seulement si,  $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3, 0)$ .

La fonction  $f$  prend des valeurs supérieures à  $f(x_0, y_0)$  et des valeurs inférieures à  $f(x_0, y_0)$  : elle n'a ni minimum, ni maximum.

**71.2** Le plan tangent en  $M_0$  au graphe de la fonction

$$f = [(x, y) \mapsto 13x^2 - 14xy + 5y^2 + 14x - 10y + 5]$$

est horizontal si, et seulement si,  $M_0 = (0, 1, 0)$ . Quels que soient les réels  $h_x$  et  $h_y$ ,

$$f(h_x, 1 + h_y) = (h_x \quad h_y) \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \geq f(0, 1)$$

donc  $f(0, 1)$  est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**71.3** Le plan tangent en  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  au graphe de

$$f = [(x, y) \mapsto 9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 5]$$

est horizontal si, et seulement si,  $y_0 = 3x_0 - 2$ .

Quels que soient les réels  $h_x$  et  $h_y$ ,

$$f(1 + h_x, 1 + h_y) = 1 + (h_x \quad h_y) \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

donc le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$  est égal à 1.

**72.** Suite de [16.124] – On rappelle que  $SL_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dont le déterminant est égal à 1. La matrice  $I_n$  appartient à  $SL_n(\mathbb{R})$  et le sous-espace tangent à  $SL_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$  est dirigé par l'hyperplan des matrices de trace nulle.

**V**

**Recherche d'extrema sous contrainte**

**73.** On s'intéresse aux extrema d'une fonction numérique

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

définie sur une partie  $X$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

**73.1** On suppose dans ce qui suit que la fonction  $f$  est différentiable sur un ouvert  $U$  de  $E$  qui contient l'ensemble  $X$ .

**73.2** Le calcul différentiel ne permet de mener l'étude de la fonction  $f$  qu'au voisinage d'un point donné. On peut ainsi espérer localiser des extrema locaux, mais l'étude des extrema globaux nécessite de recourir à d'autres méthodes.

**74.** → Si la restriction de  $f$  à  $X$  passe par un extremum au point  $M_0 \in X$ , alors

$$\forall v \in T_{M_0}X, \quad df(M_0)(v) = 0.$$

**75.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction différentiable.

**75.1** On considère la surface de niveau

$$X = [g(M) = 0]$$

d'une fonction  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  comme une *contrainte* sur la fonction  $f$ , au sens où on étudie la restriction de  $f$  à  $X$ .

En général, la surface  $X$  est une partie d'intérieur vide, ce qui nous empêche d'appliquer [15.3].

**75.2** → **Optimisation sous contrainte (condition nécessaire)**

Si la restriction de  $f$  à  $X$  atteint un extremum local en un point régulier [54.3]  $M_0$  de  $X$  :

$$dg(M_0) \neq 0,$$

alors la forme linéaire  $df(M_0)$  est proportionnelle à la forme linéaire  $dg(M_0)$ .

**75.3** **Interprétation euclidienne**

Supposons que  $E$  soit muni d'une structure euclidienne.

Si la restriction de  $f$  à la surface  $X$  atteint un extremum local en un point  $M_0$  de  $X$  tel que  $\nabla g(M_0) \neq 0$ , alors le gradient  $\nabla f(M_0)$  de la fonction est colinéaire au gradient  $\nabla g(M_0)$  de la contrainte.

**Entraînement**

**76.** On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Déterminer les extrema de  $f$  sous la contrainte  $\Gamma = [g(x, y) = 1]$ , puis les extrema de  $g$  sous la contrainte  $\Phi = [f(x, y) = 1]$ .

L'utilisation du Théorème [75.2] est-elle pertinente ?

**77.** Déterminer les extrema de la fonction  $f$  sous la contrainte  $[g(x, y) = 0]$  dans les cas suivants.

**77.1**  $f(x, y) = xy, g(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$

**77.2**  $f(x, y) = \ln(x - y), g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$

**77.3**  $f(x, y) = x^2 + y^2, g(x, y) = 4x^2 - 16y^2 - 1$

78. L'application  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
La fonction  $f$  atteint un maximum et un minimum sur l'ensemble

$$D = [x^2 + y^2 \leq 2],$$

respectivement égaux à 0 et à 2.

79. Déterminer les points les plus éloignés de l'origine (pour la distance euclidienne canonique) de l'ensemble

$$\mathcal{E} = [3x^2 + 3y^2 - 2xy \leq 1].$$

80. On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

80.1 Déterminer les extrema de  $f$  sous la contrainte  $[g(x, y) \leq 4]$ .

80.2 Déterminer les extrema de  $g$  sous la contrainte  $[f(x, y) \leq 1]$ .

81. On doit fabriquer des canettes cylindriques en aluminium de volume  $V_0$  imposé. Quelles doivent être les dimensions des canettes pour minimiser la quantité d'aluminium utilisé ?

82. Soient  $1 < p \leq q$ . Étudier le maximum de la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^p$$

définie sur  $(\mathbb{R}_+)^n$  et soumise à la contrainte

$$\sum_{k=1}^n x_k^q = 1.$$

**83. Méthode du lagrangien (condition suffisante)**

Soit  $U$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On considère deux fonctions

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : U \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe  $\mathcal{C}^2$  et on étudie la fonction  $f$  sous la contrainte

$$X = [g(M) = 0]$$

en supposant que la forme linéaire  $dg(M)$  est surjective en chaque point de  $X$ .

83.1  $\Leftrightarrow$  Le lagrangien est la fonction  $\mathcal{L} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y, \lambda) \in U \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

83.2 Si le point  $M_0 = (x_0, y_0) \in X$  et le réel  $\lambda_0$  vérifient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(M_0) = g(M_0) = 0,$$

alors  $df(M_0) = \lambda_0 \cdot dg(M_0)$ .

83.3 On définit alors la fonction  $\mathcal{L}_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$\forall (x, y) \in U, \quad \mathcal{L}_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 \cdot g(x, y).$$

1. Pour tout point  $M \in X$ , le réel  $f(M)$  est égal à  $\mathcal{L}_0(M)$ .
2. Si la hessienne de  $\mathcal{L}_0$  est définie positive (resp. définie négative) en  $M_0$ , alors, sous la contrainte  $X$ , la fonction  $f$  atteint un minimum local strict (resp. un maximum local strict) en  $M_0$ .
3. Si la restriction de la hessienne  $H_{\mathcal{L}_0}(M_0)$  au sous-espace  $\text{Ker } dg(M_0)$  est définie positive (resp. définie négative), alors, sous la contrainte  $X$ , la fonction  $f$  atteint un minimum local strict (resp. un maximum local strict) en  $M_0$ .

**Questions, exercices & problèmes**

**Perfectionnement**

**84. Questions pour réfléchir**

1. Suite de [3] – Pourquoi ne peut-on définir le sens de variation d'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ?
2. On suppose que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  atteint un extremum en un point  $M_0 \in \Omega$  qui n'est pas un point critique de  $f$ . Que peut-on en déduire ?
3. Soit  $f$ , une fonction continue sur un compact  $K$ . Condition pour que les extrema soient atteints sur la frontière de  $K$ .
4. Suite de [21.5] – Exemple d'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $rt - s^2 = 0$  et :
  - 4.a admettant un maximum local en  $M_0$  ?
  - 4.b admettant un minimum local en  $M_0$  ?
  - 4.c n'admettant pas d'extremum local en  $M_0$  ?
5. Suite de [31.1] – Interpréter graphiquement le résultat.
6. On suppose que  $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$  est une application telle que  $df(M)$  soit l'application nulle pour tout  $M \in U$ . Alors l'application  $f$  est *localement constante* au sens où, pour tout  $M_0 \in U$ ,

$$\exists V \in \mathcal{V}(M_0), \exists u \in F, \quad \forall M \in V, \quad f(M) = u.$$

L'application  $f$  est-elle constante ? Et si on suppose que  $U$  est connexe par arcs ?

85. Étudier les extrema sur  $\mathbb{R}^2$  de la fonction définie par

$$f(x, y) = x^2 + (y^2 - y)^2.$$

86. La fonction polynomiale  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 y^2 - y^2$$

possède sept points critiques :

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{1,2,3,4} = (\pm\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{2/3}), \quad P_{5,6} = (0, \pm\sqrt{1/2}).$$

Les points  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  sont des minima locaux ; les points  $P_0, P_5$  et  $P_6$  sont des points selles. Pour tout  $r \geq 0$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq \frac{r^4}{4} - r^2.$$

La fonction  $f$  n'a donc pas de maximum global, mais un minimum global, égal à  $-1/3$ .

87. La fonction  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x^2 - y^2) \exp[-(x^2 + y^2)]$$

possède cinq points critiques. Elle atteint un maximum global en  $(\pm 1, 0)$  ; un minimum global en  $(0, \pm 1)$  ; le dernier point critique est un point selle.

88. Soit  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $f$  définie par

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = y(x^2 + \ln^2 y)$$

n'est pas majorée, mais elle atteint un minimum global. Elle admet deux points critiques :  $(0, 1)$  et  $(0, e^{-2})$ .

**89. Homographies et similitudes**

On considère la fonction  $f$  définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}, \quad f(z) = \frac{2z+1}{z+2}$$

comme une fonction de  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2,0)\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\forall (x,y) \in U, \quad \varphi(x,y) = (\Re f(x+iy), \Im f(x+iy)).$$

La fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . Pour tout point  $M \in U$ , comme il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\text{Jac } \varphi(M) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

il existe un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  et une matrice orthogonale  $P \in O_2(\mathbb{R})$  tels que  $\text{Jac } \varphi(M) = \lambda P$ .

**90. Image d'un arc paramétré par une fonction  $\mathcal{C}^1$**

On suppose que  $f : U \rightarrow F$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  et que, pour tout  $M_0 \in U$ , l'application linéaire tangente  $df(M_0)$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ .

On suppose que les deux supports  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de deux arcs paramétrés  $(I_1, \gamma_1)$  et  $(I_2, \gamma_2)$  ont un point commun

$$M_0 = \gamma_1(s_1) = \gamma_2(t_2).$$

1. Définir l'angle formé par les deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  au point  $M_0$ .
2. Comparer cet angle avec l'angle formé par  $f_*(\Gamma_1)$  et  $f_*(\Gamma_2)$  en  $P_0 = f(M_0)$ .
3. Étudier le cas où  $df(M_0)$  est une similitude.

**Approfondissement**

**91.** Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . L'espace  $\mathbb{R}^d$  est muni de sa structure euclidienne canonique et, pour tout vecteur  $x$ , on note  $Ax$ , l'image de  $x$  par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ .

**91.1** Pour tout  $x \in E$ , on pose

$$\varphi(x) = \langle x | A^\top \cdot Ax \rangle.$$

Restreinte à la sphère unité  $\{\|x\| = 1\}$ , l'application  $\varphi$  atteint un maximum en un vecteur  $x_0$  qui est un vecteur propre de  $A^\top \cdot A$  :

$$A^\top \cdot Ax_0 = \|Ax_0\|^2 x_0.$$

**91.2** On suppose que  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et, pour tout  $x \in E$ , on pose

$$\psi(x) = \langle x | Ax \rangle.$$

Restreinte à la sphère unité, l'application  $\psi$  atteint un maximum en un vecteur  $x_0$  qui est un vecteur propre de  $A$  :  $\rightarrow$  [15.29.1]

$$Ax_0 = \langle Ax_0 | x_0 \rangle x_0.$$

**92. Fonction de Leibniz**

Soient  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  d'un espace euclidien et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , une famille de réels. On pose  $\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

1. Si  $\sigma \neq 0$ , la fonction  $f$  définie par

$$\forall M \in E, \quad f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \|A_k M\|^2$$

atteint un extremum global au point  $G = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$ .

2. Étudier le cas  $\sigma = 0$ .

**93. Théorème de Lax-Milgram**

On suppose que  $E$  est un espace euclidien.

On choisit un vecteur  $u \in E$  et un endomorphisme  $f \in \mathcal{S}(E)$  dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

**93.1** L'application  $g$  définie par

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x) | x \rangle - \langle u | x \rangle$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $E$  et pour tout  $x_0 \in E$ ,

$$\nabla g(x_0) = f(x_0) - u \quad \text{et} \quad \nabla^2(g)(x_0) = f.$$

L'unique point critique de  $g$  est  $x_0 = f^{-1}(u)$ .

**93.2** Pour tout vecteur  $h \in E$  non nul,

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + \frac{1}{2} \langle f(h) | h \rangle > g(x_0)$$

donc  $g(x_0)$  est un minimum global strict.

**94.** Soient  $A \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ . Exprimer, en fonction de  $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le gradient  $\nabla f(X_0)$  et la hessienne  $H_f(X_0)$  de la fonction  $f$  définie par

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = \|AX - B\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne canonique sur  $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .

**95.** La fonction  $f$  définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$

admet  $M_0 = (-1, 0, 0)$  pour seul point critique. Elle atteint son minimum absolu en ce point.

**96.** La fonction définie par  $f(x,y) = xe^y + ye^x$  admet  $(-1, -1)$  pour seul point critique. Elle ne passe pas par un extremum local en ce point.

**97.** L'origine est le seul point critique de la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_n^2 + (1+x_n)^3 \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$$

et  $f$  atteint un minimum local strict en ce point. En revanche, cette fonction n'a pas de minimum global.

**98. Polynômes de Hermite**

Si la fonction  $f$  définie sur l'ouvert

$$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

par

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln |x_i - x_j|.$$

atteint un minimum local au point  $x_0 = (r_1, \dots, r_n) \in U$ , alors on pose

$$H_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - r_i).$$

Comme  $H_n''(r_i) - 2r_i H_n'(r_i) = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la fonction  $H_n$  est une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2tx'(t) + 2nx(t) = 0.$$

**99.** Soit  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ .

1. Étudier la continuité de la fonction  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Peut-on en conclure à l'existence d'un maximum et d'un minimum de  $f$ ?

2. Calculer le minimum et le maximum de  $f$  à l'aide de la méthode des crêtes. Comment trouver les extrema de  $f$  en cherchant ses points critiques?

**Fonctions implicites**

**100.** Soit  $F$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^{d+1}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**100.1** Soit  $M_0 = (x_1^0, \dots, x_d^0, x_{d+1}^0)$ , un point de l'hypersurface  $X = [F(M) = 0]$ . Si

$$\frac{\partial F}{\partial x_{d+1}}(M_0) \neq 0,$$

alors le *théorème des fonctions implicites* affirme qu'il existe un voisinage

$$\mathcal{V}_{d+1} = \mathcal{V}_d \times ]x_{d+1}^0 - \alpha, x_{d+1}^0 + \alpha[$$

du point  $M_0$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  avec

$$\mathcal{V}_d = ]x_1^0 - \alpha, x_1^0 + \alpha[ \times \dots \times ]x_d^0 - \alpha, x_d^0 + \alpha[$$

et une fonction  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{V}_d$ , tels que l'hypersurface  $X$  puisse être représentée comme le graphe de la fonction  $g$  au voisinage de  $M_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathcal{V}_{d+1} \\ F(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{V}_d \\ x_{d+1} = g(x_1, \dots, x_d) \end{array} \right\}$$

On dit alors que l'équation  $F(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = 0$  définit implicitement  $x_{d+1}$  comme une fonction des variables  $x_1, \dots, x_d$  : il est en général impossible de donner une expression simple de la fonction  $g$ .

**100.2** On suppose que  $y = g(x)$  sur la courbe  $[F(x, y) = 0]$  au sens où

$$F(x, g(x)) = 0$$

sur un voisinage de  $x_0$ . Alors

$$g'(x) = \frac{-F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

pour tout  $x$  voisin de  $x_0$ .

**100.3** On suppose que  $z = g(x, y)$  sur la surface  $[F(x, y, z) = 0]$ . Exprimer les dérivées partielles de  $g$  en fonction des dérivées partielles de  $F$ .

**101.** Soient  $F = (F_1, \dots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+p}^0),$$

un point de l'hypersurface  $X = [F(M) = 0]$ .

**101.1** Si la matrice carrée (extraite de la jacobienne de  $F$  au point  $M_0$ )

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(M_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ n+1 \leq j \leq n+p}} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est inversible, alors le *théorème des fonctions implicites* affirme qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_n$  du point

$$M'_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage  $\mathcal{V}_p$  du point

$$M''_0 = (x_{n+1}^0, \dots, x_{n+p}^0)$$

dans  $\mathbb{R}^p$  et une fonction  $g : \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{V}_p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que  $X$  puisse être localement représentée comme le graphe de la fonction  $g$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathcal{V}_n \\ M'' \in \mathcal{V}_p \\ F(M', M'') = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} M' \in \mathcal{V}_n \\ M'' = g(M') \end{array} \right\}$$

**101.2** En particulier, si  $F = (F_1, F_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ , alors la ligne de niveau  $X = [F(M) = 0]$  peut être vue localement comme l'intersection des deux surfaces

$$\Sigma_1 = [F_1(M) = 0] \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = [F_2(M) = 0].$$

Si en un point  $M_0 \in X$  les dérivées partielles

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0)$$

ne sont pas nulles, alors  $X$  peut être vue localement comme l'intersection des deux surfaces

$$[z = g_1(x, y)] \quad \text{et} \quad [z = g_2(x, y)].$$

Si de plus la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0) \end{pmatrix}$$

est inversible, alors  $X$  peut être vue localement comme une courbe paramétrée :

$$(y, z) = (f_1(x), f_2(x)).$$

**101.3** On suppose que  $y = f_1(x)$  et  $z = f_2(x)$  sur la courbe

$$[F_1(x, y, z) = 0] \cap [F_2(x, y, z) = 0].$$

Exprimer les dérivées de  $f_1$  et  $f_2$  en fonction des dérivées partielles de  $F_1$  et de  $F_2$ .