Topologie d'un espace vectoriel normé

1. On considère un espace vectoriel E, qu'on suppose muni d'une norme $\|\cdot\|$.

I

Image directe, image réciproque

2. ✍ *Quel que soit l'ensemble X, le* **complémentaire** *d'une partie A de X est noté A^c.*

3. Étant donnée une application f d'un ensemble X dans un ensemble Y, on peut lui associer deux applications

$$f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) \quad \text{et} \quad f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X).$$

4. Image directe

4.1 ✍ *L'***image (directe)** *d'une partie $A \subset X$ par une application $f : X \to Y$ est définie par*

$$f_*(A) = \{f(x),\, x \in A\} = \{y \in Y : \exists\, x \in A, \quad y = f(x)\}.$$

On la note aussi $f(A)$.

4.2 L'application f_* est croissante (pour l'inclusion) de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(Y)$.

$$\forall\, (A,B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X), \quad A \subset B \implies f_*(A) \subset f_*(B)$$

4.3 ➙ *Soit $f : X \to Y$. Quelles que soient les parties A et B de X,*

(1) $$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$$

(2) $$f_*(A \cap B) \subset f_*(A) \cap f_*(B).$$

5. Image réciproque

5.1 ✍ *L'***image réciproque** *d'une partie $A \subset Y$ par une application $f : X \to Y$ est définie par*

$$f^*(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

On la note aussi $[f \in A]$.

5.2 Dans les calculs, la notation $[f \in A]$, ou $[f(x) \in A]$, est plus utile que toute autre notation pour représenter l'image réciproque de A par f.

5.3 L'application f^* est croissante (pour l'inclusion) de $\mathfrak{P}(Y)$ dans $\mathfrak{P}(X)$.

$$\forall\, (A,B) \in \mathfrak{P}(Y) \times \mathfrak{P}(Y), \quad A \subset B \implies [f \in A] \subset [f \in B]$$

5.4 ➙ *Soit $f : X \to Y$. Quelles que soient les parties A et B de Y,*

(1) $$[f \in A \cup B] = [f \in A] \cup [f \in B]$$

(2) $$[f \in A \cap B] = [f \in A] \cap [f \in B]$$

(3) $$[f \in A^c] = [f \in A]^c$$

6. Composées de f_* et f^*

6.1 Pour toute partie B de Y,

$$f_* \circ f^*(B) \subset B.$$

6.2 Pour toute partie A de X,

$$A \subset f^* \circ f_*(A).$$

7. Exemples d'images réciproques

1. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par l'application $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
2. Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application det.
3. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{I_n\}$ par l'application
$$\Big[M \mapsto M^\top.M\Big] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$
4. Le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles est l'image réciproque du singleton $\{0_n\}$ par l'application
$$\Big[M \mapsto M^\top - M\Big] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$
5. Le sous-espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques est l'image réciproque du singleton $\{0_n\}$ par l'application
$$\Big[M \mapsto M^\top + M\Big] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$
6. Un cercle du plan euclidien canonique est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par un polynôme de degré 2 :
$$\big[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 = 0\big].$$
7. Un disque du plan euclidien canonique est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 0]$ par un polynôme de degré 2 :
$$\big[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 \leqslant 0\big].$$
8. L'image réciproque du segment $[r^2, R^2]$ par l'application
$$\Big[(x,y) \mapsto (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\Big] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
est l'anneau de centre (x_0, y_0), de rayon intérieur r et de rayon extérieur R.
9. Une sphère de l'espace euclidien canonique est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par un polynôme de degré 2 :
$$\big[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - R^2 = 0\big].$$
10. L'image réciproque du carré $[0,a] \times [0,a]$ par l'application
$$\big[(x,y) \mapsto \big(|x-x_0|, |y-y_0|\big)\big] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
est un carré de centre (x_0, y_0) et de côté $2a$.
11. Dans le plan euclidien canonique, les ***coniques*** sont les images réciproques du fermé $\{0\}$ par les polynômes de degré 2 en deux variables :
$$[ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0].$$
12. Les ***quadriques*** de l'espace euclidien canonique sont les images réciproques du fermé $\{0\}$ par les polynômes de degré 2 en trois variables :
$$[a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3y + d = 0].$$
13. Un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une forme linéaire non nulle.
Un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est l'image réciproque d'un singleton $\{a\} \subset \mathbb{R}$ par une forme linéaire non nulle.
14. Une représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel ou affine de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un système de r équations en n inconnues) caractérise ce sous-espace comme l'image réciproque d'un singleton de $\mathbb{R}^r$ par une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^r$.
15. $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap [\det(M) = 1]$.
16. Pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$, on note M_r, l'ensemble des matrices dont le rang est supérieur à r.

16.a à toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont associés $\binom{n}{r}$ mineurs de taille $1 \leqslant r \leqslant n$. L'ensemble M_r est l'union des images réciproques de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par $\binom{n}{r}$ applications polynomiales en n^2 variables.

16.b Pour tout $1 \leqslant r < n$, l'ensemble des matrices de rang r est égal à $M_r \cap M_{r+1}^c$.

Entraînement

8. Questions pour réfléchir

1. Condition sur f pour que

$$\forall\,(A,B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X), \quad f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B).$$

2. Condition sur f pour que

$$\forall\,A \in \mathfrak{P}(X), \quad f_*(A^c) = \big[f_*(A)\big]^c.$$

3. Condition sur f^* pour que f soit surjective.
4. Condition sur f^* pour que f soit injective.
5. Condition sur $f\,:\,X \to Y$ pour que

$$\forall\,B \in \mathfrak{P}(Y), \quad f_* \circ f^*(B) = B.$$

6. Condition sur $f\,:\,X \to Y$ pour que

$$\forall\,A \in \mathfrak{P}(X), \quad f^* \circ f_*(A) = A.$$

9. Images directes

1. Représenter un cercle (resp. un carré) comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter un disque comme l'image directe d'un carré $[a,b] \times [c,d]$ par une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

II

Filtre des voisinages

10. Définir une ***topologie*** sur un ensemble sert à établir les notions de suite convergente et de fonction continue au voisinage d'un point : on commence par définir la notion de *voisinage* d'un point.

11. On définit de manières distinctes les voisinages d'un point de E (pour définir ensuite les notions de suites convergentes et de fonctions continues) et les voisinages des points à l'infini (pour définir les limites à l'infini et les limites infinies).

Les propriétés fondamentales, communes à toutes les notions de voisinage, sont présentées dans le théorème [**14**].

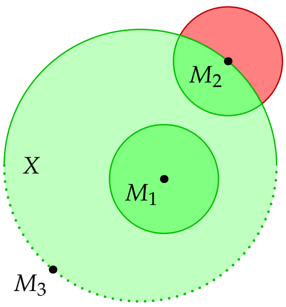
12. Voisinages d'un point de E

12.1 ✍ *Une partie V de E est un* **voisinage** *du point $x_0 \in E$ lorsque*

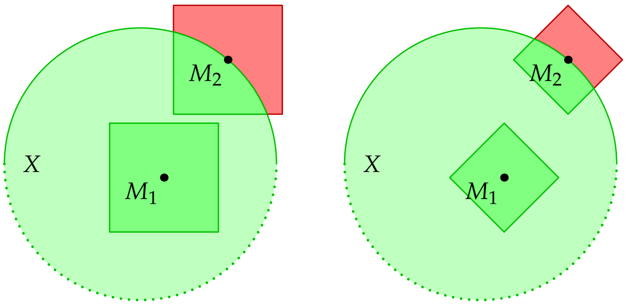
$$\exists\,r > 0, \quad B_o(x_0, r) \subset V.$$

Cette propriété est notée $V \in \mathscr{V}(x_0)$, ou $V \in \mathscr{V}_E(x_0)$ en cas d'ambiguïté.

12.2 La partie X est un voisinage du point M_1, mais pas du point M_2 : tout disque centré en M_2 rencontre le complémentaire de X. Le point M_3 n'appartient pas à X.



12.3 Les propriétés précédentes, vues pour la norme euclidienne canonique, sont également vraies pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ et pour la norme $\|\cdot\|_1$.



12.4 Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si, et seulement si, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset V.$$

13. Voisinages d'un point à l'infini

13.1 ✍ *Une partie V de $\mathbb{N}$ est un* **voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$** *lorsque*

$$\exists\,N_0 \in \mathbb{N}, \forall\,n \geqslant N_0, \quad n \in V.$$

13.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si,

$$\forall\,W \in \mathscr{V}_E(\ell), \exists\,V \in \mathscr{V}_{\mathbb{N}}(+\infty), \forall\,n \in V, \quad u_n \in W.$$

13.3 ✍ *Une partie V de $\mathbb{Z}$ est un* **voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{Z}$** *lorsque*

$$\exists\,N_0 \in \mathbb{Z}, \forall\,n \geqslant N_0, \quad n \in V.$$

De même, une partie V de $\mathbb{Z}$ est un **voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{Z}$** *lorsqu'il existe $N_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $n \in V$ pour tout $n \leqslant N_0$.*

13.4 ✍ *Une partie V de $\mathbb{R}$ est un* **voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$** *lorsque*

$$\exists\,A \in \mathbb{R}, \quad [A, +\infty[\subset V.$$

C'est un **voisinage de $-\infty$** *lorsque*

$$\exists\,B \in \mathbb{R}, \quad]-\infty, B] \subset V.$$

13.5 ✍ *Une partie V de E est un* **voisinage de l'infini dans E** *lorsque son complémentaire V^c est borné.*

13.6 → *Une partie V de E est un voisinage de l'infini si, et seulement si,*

$$\exists\,A \in \mathbb{R}_+, \quad \big(\|x\| \geqslant A \implies x \in V\big)$$

14. → Propriétés filtrantes des voisinages

Que x_0 soit un point de E ou un point à l'infini,

14.1 *Si $V \in \mathscr{V}(x_0)$, alors $V \neq \varnothing$.*

14.2 *Si $V, W \in \mathscr{V}(x_0)$, alors $V \cap W \in \mathscr{V}(x_0)$.*

14.3 *Si $V \in \mathscr{V}(x_0)$ et si $V \subset W$, alors $W \in \mathscr{V}(x_0)$.*

14.4 L'intersection d'un nombre *fini* de voisinages d'un point x_0 est un voisinage de x_0.

15. Séparation des points

15.1 → *Étant donné deux points distincts x et y dans E, il existe deux voisinages $V \in \mathscr{V}(x)$ et $W \in \mathscr{V}(y)$ tels que $V \cap W = \varnothing$.*

15.2 Pour tout $x_0 \in E$,

$$\bigcap_{W \in \mathscr{V}(x_0)} W = \{x_0\}.$$

15.3 Pour tout $x_0 \in E$, il existe une suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages de x_0 telle que

$$\forall\,n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} \subset W_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \{x_0\}.$$

Entraînement

16. Questions pour réfléchir

1. $V \in \mathscr{V}(x_0) \iff \exists\, r > 0, \quad B_f(x_0, r) \subset V$

2.a $V \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(+\infty) \iff \exists\, A > 0, \quad]A, +\infty[\subset V$

2.b $V \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(-\infty) \iff \exists\, B < 0, \quad]-\infty, B[\subset V$

3. *Suite de* [14.4] – L'intersection d'une *suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages de x_0 n'est pas nécessairement un voisinage de x_0.

17. Boules et bases

1. Si l'espace vectoriel E admet une base $(e_i)_{i\in I}$ (sans qu'il soit nécessairement de dimension finie), alors toute boule centrée en 0_E et de rayon $r > 0$ contient une base de E.

2. Pour tout $a \in E$, il existe une famille presque nulle de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que

$$a = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i.$$

Si $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 1$, alors la famille $(e_i - a)_{i\in I}$ est une base de E. Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Toute boule de rayon $r > 0$ contient une base de E.

III

Ouverts, fermés, compacts

18. On définit une ***topologie*** sur un ensemble E en décidant quelles parties de E seront ouvertes.

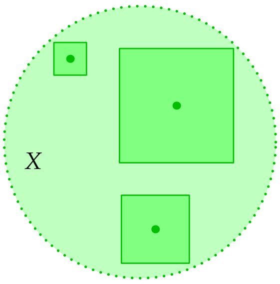
19. Parties ouvertes

19.1 ✍ *Une partie U de E est* **ouverte** *lorsque U est un voisinage de chacun de ses points :*

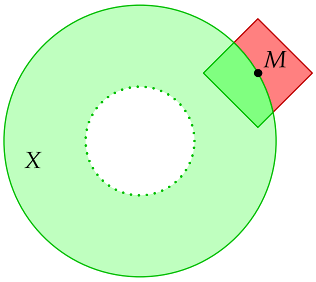
$$\forall\, x_0 \in U, \quad U \in \mathscr{V}(x_0).$$

On dit aussi que U est un **ouvert** *de E.*

19.2 La partie X est un ouvert pour la norme produit en tant que voisinage de chacun de ses points. C'est également vrai pour la norme euclidienne canonique et pour la norme $\|\cdot\|_1$.



19.3 La partie X n'est pas un voisinage du point M. Elle n'est donc pas ouverte pour la norme $\|\cdot\|_1$, pas plus que pour la norme euclidienne canonique ou pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.



19.4 L'ensemble vide et E sont des ouverts de E.

19.5 Toute boule ouverte est un ouvert de E.

19.6 L'union d'une famille quelconque de parties ouvertes est une partie ouverte.

19.7 L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.

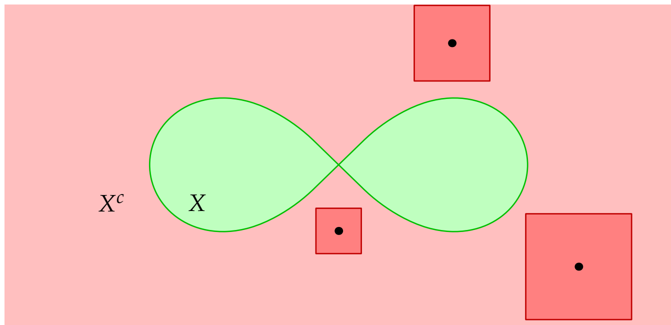
20. Parties fermées

On peut définir les parties fermées par référence aux parties ouvertes [20.1], mais on comprendra mieux cette notion par la caractérisation [20.8] : les parties fermées sont celles qui sont stables par passage à la limite.

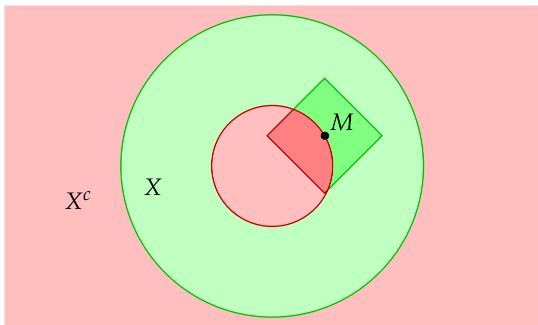
20.1 ✍ *Une partie $F \subset E$ est* **fermée** *lorsque son complémentaire F^c est un ouvert.*

On dit aussi que F est un **fermé** *de E.*

20.2 La partie X est fermée car son complémentaire X^c est un voisinage de chacun de ses points (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais aussi pour la norme euclidienne canonique et pour $\|\cdot\|_1$).



20.3 La partie X n'est pas fermée car son complémentaire X^c n'est pas un voisinage du point $M \in X^c$ (pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais aussi pour la norme euclidienne canonique et pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$).



20.4 L'ensemble vide et E sont des fermés.

20.5 L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

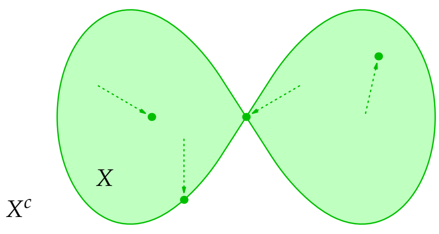
20.6 L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.

20.7 Les parties finies de E sont des fermés. →[88]

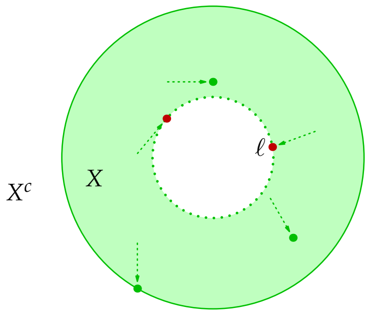
20.8 → **Caractérisation séquentielle des fermés**

Une partie A de E est un fermé si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A est un élément de A.

20.9 Pour toute suite convergente d'éléments de X, la limite appartient encore à X, donc la partie X est fermée.



20.10 Il existe au moins une suite convergente d'éléments de X dont la limite ℓ n'appartient pas à X, donc la partie X n'est pas fermée.



20.11 Exemples et contre-exemples
1. Toute boule fermée est un fermé. La sphère unité est un fermé.
2. Le plan $[z = 0]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme produit.
3. Si l'espace $E = \mathscr{B}([a,b])$ des fonctions bornées sur $[a,b]$ est muni de la norme de la convergence uniforme sur $[a,b]$, alors le sous-espace $\mathscr{C}^0([a,b])$ est un fermé de E.
4. D'après le théorème de Weierstrass **[8.51.1]**, le sous-espace des applications polynomiales sur $[0,1]$ n'est pas un fermé de $\mathscr{C}^0([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$.

III.1 Adhérence d'une partie

21.1 ✍ *Un point x de E est* **adhérent** *à A lorsque*

$$\forall\, r > 0, \quad A \cap B_f(x,r) \neq \varnothing.$$

21.2 ✍ *L'***adhérence de** *A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, des points de E qui sont adhérents à A.*
21.3 Tout point de A est adhérent à A : $A \subset \overline{A}$.

22. ➙ Caractérisation de l'adhérence
Les propriétés suivantes sont équivalentes.
22.1 *Le point x est adhérent à la partie A de E.*
22.2 $\forall\, r > 0,\ \exists\, y(r) \in A, \quad d\big(x, y(r)\big) \leqslant r$
22.3 *Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*
22.4 *La distance de x à A est nulle : $d(x,A) = 0$.*

23.1 Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{A}$ qui converge vers $\ell \in E$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(\ell, u_n) \leqslant d(\ell, x_n) + 2^{-n}$$

et $\ell \in \overline{A}$.
23.2 ➙ Autre caractérisation de l'adhérence
L'adhérence de A est un fermé qui contient A et tout fermé F qui contient A contient aussi l'adhérence de A :

$$A \subset F \implies \overline{A} \subset F.$$

23.3 Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.
23.4 Une partie A de E est fermée si, et seulement si, $\overline{A} = A$.

III.2 Parties denses

24. ✍ *Une partie $B \subset A$ est* **dense** *dans A lorsque l'adhérence de B contient A.*

25. ➙ *Une partie B de A est dense dans A si, et seulement si, tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.*

26. Exemples de parties denses
26.1 Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
26.2 L'intervalle ouvert $]a,b[$ est dense dans le segment $[a,b]$.
26.3 Le sous-espace des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme de convergence uniforme sur $[a,b]$.
26.4 *Suite de* **[3.35]** – L'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense pour la norme $\|\cdot\|_1$ dans l'espace $\ell^1(\mathbb{R})$ des suites sommables, mais n'est pas dense pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites bornées.

III.3 Intérieur d'une partie

27.1 ✍ *Un point x_0 est* **intérieur à** *la partie A lorsque A est un voisinage de x_0.*
27.2 ✍ *L'***intérieur** *d'une partie A est l'ensemble, noté A°, des points intérieurs à A.*

$$x \in A^\circ \iff A \in \mathscr{V}(x)$$

27.3 Les points intérieurs à A sont des points de A : $A^\circ \subset A$.
28. Caractérisation de l'intérieur
28.1 ➙ *L'intérieur d'une partie A est un ouvert contenu dans A et tout ouvert G contenu dans A est aussi contenu dans l'intérieur de A :*

$$G \subset A \implies G \subset A^\circ.$$

28.2 Une partie A est ouverte si, et seulement si, $A = A^\circ$.
28.3 Pour toute partie A,

$$(\overline{A})^c = (A^c)^\circ \quad \text{et} \quad (A^\circ)^c = \overline{(A^c)}.$$

29. Exemples d'intérieurs
29.1 L'intérieur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est l'intervalle ouvert dont les bornes sont celles de I.
29.2 L'intérieur de la boule fermée $B_f(x_0,r)$ est la boule ouverte $B_o(x_0,r)$.
29.3 L'intérieur de $\mathbb{Q}$, vu comme une partie de $\mathbb{R}$, est vide.
30. Intérieur d'un espace vectoriel
D'après l'exemple des droites et des plans en dimension 3, on comprend qu'un sous-espace strict est en quelque sorte une partie plate de E.
30.1 Un sous-espace vectoriel qui contient une boule ouverte $B_o(x_0,r)$ contient aussi la boule ouverte $B_o(0_E,r)$.
30.2 ➙ *L'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de E est vide.*

III.4 Frontière d'une partie

31.1 ✍ *La* **frontière de** *A (ou* **bord** *de A) est définie par*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

31.2

$$E = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (A^c)^\circ$$

31.3 Un point x appartient à la frontière de A si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A^c telles que

$$x = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

III.5 Parties compactes

32. La notion de ***compacité*** tire son origine du théorème de Bolzano-Weierstrass **[3.60]** et permet de reformuler sous forme générale les propriétés des fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$.

33. ✍ *Une partie A de E est* **compacte** *lorsque toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.*

34. Si F est une partie fermée de E contenue dans une partie compacte K, alors F est une partie compacte de E.

35.1 ➙ *Toute partie compacte A de E est fermée et bornée.* →**[40]**
35.2 ➙ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ est compacte.
35.3 Une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

36. ➙ *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence ℓ et si tous les u_n appartiennent à une partie compacte, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Entraînement

37. Questions pour réfléchir

1. Une partie U est un ouvert si, et seulement si,

$$\forall\, x_0 \in U,\ \exists\, r > 0,\quad B_f(x_0, r) \subset U.$$

2. Une boule fermée non vide n'est pas un ouvert de E.
3. Tout ouvert est la réunion d'une famille de boules ouvertes.
4. Un ouvert non vide est une partie infinie.
5. Quels intervalles de $\mathbb{R}$ sont-ils des parties ouvertes ?
6. Une boule ouverte n'est pas un fermé.
7. Quels intervalles de $\mathbb{R}$ sont-ils des parties fermées ?
8. Si un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé, alors il est égal à $\mathbb{R}$. →[86]
9. $x \in \overline{A} \iff \forall\, r > 0,\quad A \cap B_o(x, r) \neq \varnothing$
10. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
11. L'adhérence d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est l'intervalle fermé qui a mêmes bornes que I.
12. L'adhérence de la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ est la boule fermée $B_f(x_0, r)$.
13. S'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ω, le point ω est-il adhérent à A ?
14. L'intersection des parties fermées de E qui contiennent A est égale à l'adhérence de A.
15. Si F est dense dans G et si G est dense dans E, alors F est dense dans E.
16. Le point x_0 est intérieur à A si, et seulement si,

$$\exists\, r > 0,\quad B_f(x_0, r) \subset A.$$

17. L'union des parties ouvertes contenues dans A est l'intérieur de A.
18. L'intersection d'un compact et d'une partie fermée est un compact.
19. Si $f : (E, N) \to (F, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne et si K est une partie compacte de E pour N, alors $f_*(K)$ est une partie compacte de F pour $\|\cdot\|$.

38. Densité des nombres dyadiques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue telle que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1. L'ensemble $\mathscr{D}$ des ***nombres dyadiques***

$$\mathscr{D} = \Big\{\frac{p}{2^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Si $f(0) = f(1) = 0$, alors f est l'application nulle.
3. L'application f est affine.

39. Variations sur le théorème de Weierstrass [8.51.1]

L'espace $E = \mathscr{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme sur $[a, b]$.

1. Soit $f \in E$, de moyenne nulle :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Il existe une suite de fonctions polynomiales de moyenne nulle qui converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$.

2. Si $f \in E$ est une fonction positive sur $[a, b]$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales et positives sur $[a, b]$ qui converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$.
3. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f' - P_n'\|_\infty = 0.$$

40. On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et de période 2π de la norme de convergence en moyenne quadratique sur $I = [0, 2\pi]$ [**6.93**].

1.a La suite de terme général $f_n = [t \mapsto \cos nt]$ est bornée.
1.b Si n et p sont deux entiers non nuls et distincts, alors $\|f_n - f_p\| = 1$ et on ne peut extraire aucune suite convergente de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La boule unité de E est une partie fermée et bornée qui n'est pas compacte.

41. Distance et compacité

Soit K, un compact non vide de E.

1. Pour tout $x \in E$,

$$d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y).$$

2. Si K' est un compact disjoint de K, alors $d(K, K') > 0$.
3. L'axe des abscisses et le graphe de exp sont des fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, mais la distance qui les sépare est nulle.

42. Soient A, un compact et B, un fermé de E.

1. La partie

$$A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\}$$

est un fermé de E.

2. Si B est compact, alors $A + B$ est compact.

43. Si K est un compact de E qui ne contient pas le vecteur nul, alors le cône positif

$$F = \{\lambda x,\ (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times K\}$$

est un fermé de E.

1. La partie $K = [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1]$ est bien compacte mais la partie $F = [x_1 > 0] \cup \{(0, 0)\}$ n'est pas fermée.

IV

Continuité

44. ✍ *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. Une application f de E dans F est* **continue au point** $x_0 \in E$ *lorsque*

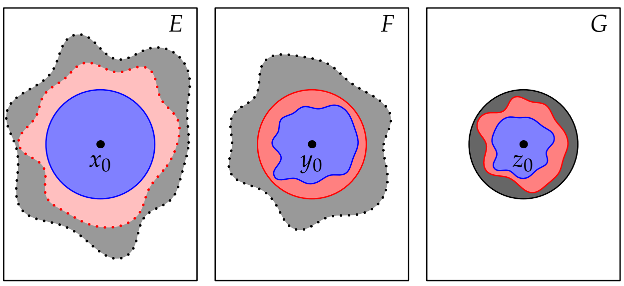
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in E,\quad \|x - x_0\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

45. ➙ *Si f est continue au point x_0, alors elle est bornée au voisinage de x_0.*

46. ➙ *Si f est continue au point x_0 et si $f(x_0) \neq y_0$, alors $f(x) \neq y_0$ au voisinage de x_0.*

47. ➙ Théorème de composition des limites

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$, trois espaces vectoriels normés.
Si $f : E \to F$ est continue au point $x_0 \in E$ et si $g : F \to G$ est continue au point $y_0 = f(x_0) \in F$, alors la composée $g \circ f$ est continue au point x_0.



48. ▷ *Si l'application $f : E \to F$ est continue au point x_0, alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

49. Caractérisations séquentielles de la continuité
49.1 ➙ *Si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$, alors l'application $f : E \to F$ est continue au point x_0.*
49.2 ➙ *On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Alors la fonction f est continue au point x_0.*

IV.1 Applications continues

50. ✍ *Une application $f : E \to F$ est* **continue** *lorsqu'elle est continue en chaque point $x_0 \in E$. L'ensemble des applications continues de E dans F est noté $\mathscr{C}^0(E, F)$.*

51. ➙ *Toute application lipschitzienne est continue.*

52. Si $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est continue, alors $\|f\|_F$ est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

53. ➙ **Densité et prolongement des égalités [8.53]**
Si f et g sont deux applications continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ et s'il existe une partie D dense dans E telle que f et g coïncident sur D, alors f et g coïncident sur E.

Continuité des applications linéaires

54. L'espace $\mathrm{L}_c(E)$ des endomorphismes lipschitziens de E est en fait l'espace des endomorphismes continus de E.
→[**3**.97]

55. ➙ *Soit f, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1. *L'application f est continue sur E.*
2. *L'application f est continue au point $x_0 = 0_E$.*
3. *L'application f est bornée au voisinage de 0_E.*
4. $$\exists\, k > 0,\ \forall\, x \in E, \quad \big\|f(x)\big\|_F \leqslant k\|x\|_E$$
5. *L'application f est lipschitzienne sur E.*

IV.2 Continuité uniforme

56. Translation d'un voisinage
Une partie V est un voisinage de $x_0 \in E$ si, et seulement si, il existe un voisinage V_0 de 0_E tel que
$$V = x_0 + V_0 = \{x_0 + x,\ x \in V_0\}.$$
L'application $f : E \to F$ est continue au point x_0 si, et seulement si :
$$\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_A(x_0)$$
ce qui équivaut à :
$$\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_E(0_E), \quad f_*(x_0 + V) \subset W.$$
Le voisinage V dépend bien sûr du voisinage W choisi, mais aussi du point x_0 considéré.
On s'intéresse ici aux fonctions f pour lesquelles ce voisinage V peut être choisi *indépendamment* du point x_0.

57.1 ✍ *L'application $f : E \to F$ est* **uniformément continue** *lorsque*
$$\forall\, W_0 \in \mathscr{V}_F(0_F),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_E(0_E),\ \forall\, x_0 \in E,\quad f_*(x_0 + V) \subset \big(f(x_0) + W_0\big).$$
57.2 L'application $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est uniformément continue si, et seulement si,
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, (x, y) \in E \times E,\quad \|x - y\|_E \leqslant \eta \implies \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leqslant \varepsilon.$$
57.3 L'ensemble des applications uniformément continues de E dans F est un espace vectoriel.
57.4 Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
57.5 Toute application uniformément continue est continue. La réciproque est fausse en général. →[**63**]

IV.3 Propriétés topologiques des fonctions continues

58. ➙ *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés et f, une application de E dans F.*
Les propositions suivantes sont équivalentes.
1. *L'application $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est continue.*
2. *Pour tout ouvert $\Omega_F \subset F$, l'image réciproque $[f \in \Omega_F]$ de Ω_F par f est un ouvert de E.*
3. *L'image réciproque par f de toute partie fermée de F est une partie fermée de E.*

Applications usuelles

59. ➙ *Le noyau d'une application linéaire continue de E dans F est un fermé de E.*

60. Continuité des formes linéaires
Soit f, une forme linéaire sur E.
1. Si f n'est pas continue, alors f n'est pas bornée sur la sphère unité et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_E telle que $f(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La forme linéaire f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

61. Problème du supplémentaire orthogonal [5.28]
Soient E, un espace préhilbertien et F, un sous-espace vectoriel de E.
1. Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la projection orthogonale sur F est continue et le sous-espace F est un fermé de E.
2. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien est fermé.
3. Si la dimension de F est infinie, il se peut que F ne soit pas fermé, mais $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ et
$$F \oplus F^\perp = F \oplus (\overline{F})^\perp \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp \subset E.$$

Continuité et compacité

62.1 ➙ *Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$, une application continue. Si $K \subset E$ est une partie compacte de E, alors son image $f_*(K)$ est une partie compacte de F.*
62.2 ➙ *Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors la restriction de f à un compact non vide K de E est bornée et atteint ses bornes.*
62.3 Si $f : E \to F$ est une application continue, alors la restriction f à un compact non vide K de E est bornée et il existe deux éléments x_m et x_M de K tels que
$$\forall\, x \in K, \qquad \big\|f(x_m)\big\|_F \leqslant \big\|f(x)\big\|_F \leqslant \big\|f(x_M)\big\|_F.$$

63. ➙ *Si $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est une application continue, alors sa restriction à une partie compacte de E est uniformément continue.*

Entraînement

64. Questions pour réfléchir
1. L'application $f : E \to F$ est continue au point x_0 si, et seulement si, l'application
$$\Big[h \mapsto \big\|f(x_0 + h) - f(x_0)\big\|_F\Big] : E \to \mathbb{R}$$
est continue au point 0_E.
2. Soit u, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
2.a L'application u est continue sur E.
2.b L'application u est continue en un point $x_0 \in E$
2.c L'application est bornée au voisinage d'un point $x_0 \in E$.
3. Une composée d'applications uniformément continues est-elle uniformément continue ?
4. Si f et g sont deux applications uniformément continues de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ dans l'algèbre normée $(F, \|\cdot\|_F)$, leur produit fg est-il aussi une application uniformément continue ?
5. Les sous-espaces propres d'une application linéaire continue de E dans F sont des fermés de E.

6. L'image directe d'un ouvert (resp. d'un fermé) de E par une application continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ n'est pas nécessairement un ouvert de F (resp. un fermé de F).

7. L'image réciproque d'une partie compacte par une fonction continue est-elle compacte ?

65. Si $f : E \to F$ est une application continue et bornée, alors

$$\sup_{x\in A} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in \overline{A}} \|f(x)\|_F$$

pour toute partie $A \subset E$.

66. Continuité des applications linéaires
Soit f, une application linéaire de E dans F.

1. Si f est continue, alors

$$A = \{x \in E : \|f(x)\|_F = 1\}$$

est un fermé de E.

2.a Si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui tend vers 0_E, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors l'application f est continue.

2.b Si f n'est pas continue, alors A n'est pas fermée.

67. Crochet de Lie [9.182]
Soient u et v, deux endomorphismes continus de E. S'il existe un scalaire α tel que

$$u\circ v - v\circ u = \alpha\,\mathrm{I}_E,$$

alors

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u\circ v^{n+1} - v^{n+1}\circ u = (n+1)\alpha v^n$$

et si v n'est pas nilpotent, alors $\alpha = 0$.

68. Si $h \in \mathscr{L}^1([a,b])$ vérifie

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \int_a^b t^n h(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors

$$\forall\, \varphi\in\mathscr{C}^0([a,b]),\quad \int_a^b \varphi(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et h est nulle presque partout sur $[a,b]$.

69. Soit K, un compact contenu dans un ouvert U de E.

1.

$$\forall\, x\in K,\ \exists\, \alpha>0,\quad B_o(x,\alpha)\subset U.$$

2. La fonction $x \mapsto \mathrm{d}(x, U^c)$ est continue sur le compact K et ne s'annule pas, donc

$$\exists\, \alpha>0,\ \forall\, x\in K,\quad B_o(x,\alpha)\subset U.$$

V

Connexité par arcs

70. On généralise ici la notion d'intervalle considéré comme une partie d'un seul tenant, afin de formuler un analogue du théorème des valeurs intermédiaires en dimension quelconque.

70.1 ✍ *Un* **arc** *de A reliant $x_1 \in A$ à $x_2 \in A$ est une fonction continue*

$$f : [a,b] \to A$$

telle que $f(a) = x_1$ et $f(b) = x_2$.

70.2 ✍ *Une partie $A \subset E$ est* **connexe par arcs** *lorsque, pour tout $(x_1,x_2)\in A\times A$, il existe un arc de A reliant x_1 à x_2.*

70.3 Exemples usuels
Les parties étoilées, et en particulier les parties convexes, sont connexes par arcs.

71. Théorème des valeurs intermédiaires
On sait que l'image d'un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

71.1 Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

71.2 ➙ *Si A est une partie connexe par arcs et si $f : A \to F$ est continue, alors $f_*(A)$ est connexe par arcs.*

71.3 Si A est une partie connexe par arcs et si $f : A\to\mathbb{R}$ est continue, alors $f_*(A)$ est un intervalle.

Composantes connexes par arcs

72. Soit $A \subset E$, une partie non vide. Quels que soient les points x_0 et x_1 dans A, on note $x_0 \sim x_1$ lorsqu'il existe un arc de A reliant x_0 à x_1. →[70.1]

72.1 La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les points de A.

72.2 La partie A est connexe par arcs si, et seulement si, il n'existe qu'une seule classe d'équivalence pour $\sim$.

72.3 Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont connexes par arcs.

72.4 ✍ *Les* **composantes connexes par arcs** *d'une partie $A\subset E$ sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\sim$.*

72.5 Les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des parties ouvertes.

73. On suppose que A est une partie de $E=\mathbb{R}$.

73.1 Les composantes connexes par arcs de A sont des intervalles.

73.2 Tout ouvert $A\subset\mathbb{R}$ est l'union d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts.

73.3 Un fermé tel que l'***ensemble de Cantor*** n'est pas l'union d'une famille dénombrable d'intervalles fermés.

Entraînement

74. Sur le théorème des valeurs intermédiaires

1. Si $f : [0,1]\to\mathbb{R}$ est continue et si $f(0) = -f(1) = 1$, alors il existe $0 < x_0 < 1$ tel que $f(x_0) = 0$.

2. La fonction $f : [0,1]\to\mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{i\pi t}$ est continue et $f(0) = -f(1) = 1$, alors que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in[0,1]$. Commenter.

75. Soient $g : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, une application continue et $\mathscr{C}$, un cercle de rayon $R>0$. Il existe deux points A et B, diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$, tels que $g(A) = g(B)$.

76. Connexité de la sphère unité
Soit E, un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2. On note S, la sphère unité de E.

1. Soit $a\in S$.

1.a Il existe $b\in S$ tel que $a\neq b$ et $a\neq -b$. Pour un tel b, la fonction

$$t\mapsto \frac{(1-t)a+tb}{\|(1-t)a+tb\|}$$

est continue de $[0,1]$ dans S.

2. La sphère unité S est connexe par arcs.

3. Le complémentaire de la boule unité fermée est connexe par arcs.

4. Dans $\mathbb{R}^2$, le complémentaire d'un ensemble fini est connexe par arcs.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

77. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas un ouvert.
2. Exemple de suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties fermées dont la réunion n'est pas un fermé.
3. Exemples de parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées.
4. Exemples de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées.
5. Exemples de parties non compactes de $\mathbb{R}$.
6. Exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

7.a Exemple de partie fermée qui n'est pas complète.

7.b Exemple de partie complète qui n'est pas compacte.

8. Exemple d'application continue qui n'est pas uniformément continue.
9. Exemple d'application qui est uniformément continue sans être lipschitzienne.

78. Questions pour réfléchir

1. Condition sur a, b, r et s pour que

1.a $B_f(b,s) \subset B_f(a,r)$;

1.b $B_f(b,s) \cap B_f(a,r) = \varnothing$;

1.c $B_f(b,s) \subset B_o(a,r)$;

1.d $B_o(b,s) \subset B_f(a,r)$;

1.e $B_o(a,r) \cap B_f(b,s) = \varnothing$.

2. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Comparer $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$; $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$.

79. Conséquences de l'inégalité triangulaire

79.1 Si A est une sphère ou une boule (ouverte ou fermée) de rayon r, alors A est une partie bornée de diamètre $2r$.

79.2 Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.

79.3 Soient $0 < s \leqslant r$.

1. $d(a,b) \leqslant r - s \iff B_o(b,s) \subset B_o(a,r)$

2. $d(a,b) \geqslant r + s \iff B_o(b,s) \cap B_o(a,r) = \varnothing$

80.1 Soient M et N, deux matrices semblables. Alors les matrices $P(M)$ et $P(N)$ sont semblables, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

80.2 Soient A, une matrice diagonalisable et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices qui converge vers la matrice B. Si toutes les matrices B_n sont semblables à A, alors la limite B est aussi semblable à A. Ce résultat subsiste-t-il si la matrice A n'est pas diagonalisable ?

Approfondissement

81. Classification des hyperplans

81.1 Soit H, un hyperplan de E.

1. L'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset \overline{H} \subset E$.

2. Si $a \in \overline{H} \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

81.2 * *Un hyperplan de E est une partie fermée ou une partie dense dans E.*

81.3 Soit f, une forme linéaire non nulle sur E.

3. L'application f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

4. On suppose maintenant que f est continue. →[**3**.99]

4.a Les images réciproques $[f > 0]$ et $[f < 0]$ sont des ouverts connexes par arcs, mais leur réunion $[f \neq 0]$ est un ouvert qui n'est pas connexe par arcs.

4.b
$$\forall\, x \in E, \quad d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{|||f|||}.$$

82. Estimation asymptotique des fonctions uniformément continues

Si $f : E \to F$ est une application uniformément continue, alors il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in E, \qquad \big|f(x)\big|_F \leqslant a\|x\|_E + b.$$

En particulier, $\big\|f(x)\big\|_F = \mathcal{O}(\|x\|_E)$ au voisinage de l'infini.

83. Applications ouvertes

On dit qu'une application $f : E \to F$ est ***ouverte*** lorsque l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F.

1. Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$.

1.a Si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F, alors f est surjective.

1.b Si E est un espace de dimension finie, alors la réciproque est vraie.

2. On munit $E = F = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie par

$$\forall\, P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

L'image de la boule unité par l'application linéaire f définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(X^n) = 2^{-n} X^n$$

est une partie d'intérieur vide.

Pour aller plus loin

84. Caractérisations de la continuité en un point

Les propositions suivantes sont équivalentes au fait que l'application $f : E \to F$ est continue au point $x_0 \in E$.

1. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0, \quad f_*\big(B_f(x_0,\eta)\big) \subset B_f\big(f(x_0),\varepsilon\big)$

2. $\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_E(x_0), \quad f_*(V) \subset W$

3. $\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_E(x_0)$

85. Applications localement lipschitziennes

Une fonction $f : E \to F$ est ***localement lipschitzienne*** lorsque, pour tout $x_0 \in E$, il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f est lipschitzienne.

1. Exemples d'applications localement lipschitziennes.

2. Une application localement lipschitzienne est continue.

3. Une application localement lipschitzienne est-elle uniformément continue ?

4. Si $f : E \to F$ est localement lipschitzienne, alors la restriction de f à une partie compacte quelconque de E est lipschitzienne.

86. Connexité de $\mathbb{R}$

Soit A, une partie de $\mathbb{R}$ qui est à la fois ouverte et fermée. On suppose qu'il existe $x_0 \in A$ et $y_0 \notin A$ avec $x_0 < y_0$ et on considère l'ensemble

$$I = \big\{x \in A \ :\ [x_0, x] \subset A\big\}.$$

1. L'ensemble I admet une borne supérieure x_1.

2. L'ensemble I est égal à $[x_0, x_1[$ ou à $[x_0, x_1]$ et ces deux éventualités sont absurdes.

3. Les seules parties de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$.

87. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Les sous-groupes additifs stricts de $\mathbb{R}$ sont de deux types : les uns sont fermés et en général isomorphes à $\mathbb{Z}$ tandis que les autres sont denses dans $\mathbb{R}$.

87.1 Classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Soit H, un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\{0\}$: on pose

$$a = \inf\{x \in H \ :\ x > 0\}.$$

1. On suppose que $a = 0$ et on se donne $\varepsilon > 0$.

1.a Il existe $x_0 \in H$ tel que $0 < x_0 < \varepsilon$.

1.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - kx_0| \leqslant \varepsilon$.

1.c Le sous-groupe H est une partie dense de $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $a > 0$.

2.a Il existe une suite d'éléments strictement positifs de H qui converge vers a.

2.b Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H \cap\,]a, a+\varepsilon[\, = \varnothing$.

2.c Le sous-groupe H contient a et $H = a\mathbb{Z}$.

2.d Le sous-groupe H est fermé.

3.a Un sous-groupe H de $(\mathbb{R}, +)$ est fermé si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

3.b Soient a et b, deux réels strictement positifs tels que le quotient b/a ne soit pas rationnel. L'ensemble

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \big\{pa + qb,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\big\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

87.2 Fonctions continues périodiques

4.a L'ensemble des périodes d'une fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, E)$ est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$.

4.b Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, E)$ est périodique mais pas constante, elle admet une plus petite période strictement positive.

88. Soit F, une partie finie d'un espace vectoriel normé. Construire un algorithme calculant

$$\min_{\substack{x\in F\\ y\in F\\ x\neq y}} \mathrm{d}(x,y)$$

et évaluer la complexité de cet algorithme.