Composition de Mathématiques

Le 22 mars 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

L'objectif de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

On considère pour cela la fonction

$$f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-xt}.$$

On définit également la fonction

$$u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

en posant

$$u(x, t) = -\frac{x \sin t + \cos t}{1 + x^2}\, e^{-xt}.$$

On pourra utiliser sans le démontrer *l'encadrement*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leqslant |t|.$$

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction

$$F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

par

$$\forall x \geqslant 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)\,dt.$$

Partie A. Préliminaires

1. Démontrer que $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ est un ouvert et que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet ouvert. La fonction f atteint-elle un maximum local sur U ?

2. Soit $x > 0$. Démontrer que la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que l'intégrale I est convergente si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

4. Soit $x \geqslant 0$. Démontrer que $[t \mapsto u(x, t)]$ est une primitive de la fonction $[t \mapsto \sin t\, e^{-xt}]$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B. Calcul de F sur $]0, +\infty[$

5. Démontrer que

$$\forall x > 0, \quad \big|F(x)\big| \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

6. Soit $a > 0$. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que

$$\forall x \geqslant a, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,dt.$$

7. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour $x > 0$. Conclure que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Partie C.

On considère les fonctions $F_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *et* $F_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *définies par*

$$F_1(x) = \int_0^1 f(x, t)\,dt \quad \textit{et par} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t)\,dt$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

8. Démontrer que la fonction F_1 est continue sur $[0, 1]$.

9. Soit $x \in [0, 1]$. Démontrer que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}\right]$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que

$$F_2(x) = \frac{x \sin 1 + \cos 1}{1 + x^2}\, e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2}\,dt.$$

10. Démontrer que la fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$.

11. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

❖ II – Problème ❖

On se donne un entier $n \geqslant 2$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique :

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

La boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ est notée B_n :

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

On fixe une famille réelle $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier les extrema de la fonction f sur la boule B_n. Pour cela, on définit la matrice symétrique $M_f \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *en posant*

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad m_{i,i} = a_{i,i}$$

et

$$\forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad m_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{2}.$$

La transposée d'une matrice A sera ici notée $A^\top$.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, *on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbb{R}$ est définie par*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

1. Justifier que l'application f atteint un maximum et un minimum sur B_2.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

soient colinéaires. Démontrer que la frontière

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

de B_2 est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. En déduire que la restriction de f à S_2 atteint un maximum et un minimum et que ces deux extrema sont atteints en des points $M = (x_1, x_2)$ tels que $x_2 = \pm x_1$.

3. Retrouver les extrema de l'application f sur S_2 en étudiant la fonction

$$[t \mapsto f(\cos t, \sin t)]\,.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et démontrer que la fonction f n'a qu'un seul point critique dans la boule unité ouverte

$$B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Atteint-elle un extremum local en ce point ?

5. En déduire que le maximum de f sur B_2 est égal à 3 et que le minimum de f sur B_2 est égal à -1.

6. Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie B. Cas général

Dans cette partie, l'entier n est supérieur ou égal à 2. Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$, on notera

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

7. Démontrer que $f(x) = X^\top.M_f.X$.

8. On suppose que S est une matrice symétrique telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = X^\top.S.X.$$

Démontrer que $S = M_f$.

9. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que

$$\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On fixe également une matrice orthogonale $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$M_f = PDP^{-1}$$

où

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $Y = P^{-1}X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

10. Démontrer que

$$Y^\top.Y = X^\top.X = \|x\|^2.$$

11. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Démontrer que

$$\lambda_1 \leqslant Y^\top.D.Y \leqslant \lambda_n$$

et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

12. En déduire que : si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors

$$\min_{x\in B_n} f(x) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \max_{x\in B_n} f(x) = \lambda_n.$$

13. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie C. Application

Dans cette dernière partie, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall\, x \in B_n, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2x_ix_j.$$

14. Déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

☞ *On pourra commencer par déterminer le rang de la matrice* $M_f - 2I_n$.

❖ III – Problème ❖

On s'intéresse ici à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: partant initialement de 0, si on se trouve sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$ à l'instant $n \in \mathbb{N}$, on a une chance sur deux de se trouver sur l'entier $(x+1)$ et une chance sur deux de se trouver sur l'entier $(x-1)$ à l'instant $(n+1)$.
Pour décrire ce processus, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ en supposant que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère aussi la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_0 = 0 \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On définit en outre une fonction

$$T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

en posant

$$T(\omega) = +\infty$$

si $S_n(\omega) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en posant

$$T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ :\ S_n(\omega) = 0\}$$

dans le cas contraire. On admet *que T est une variable aléatoire.*
Enfin, on définit deux suites réelles $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$$

et

$$q_0 = 0 \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = \mathbf{P}(T = n).$$

Partie A. Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_k définie par

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}.$$

On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes (lemme des coalitions).

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Justifier que $p_n = 0$ pour tout entier impair n.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
5. Pour $n > 0$, donner la loi de

$$Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$$

et exprimer S_n en fonction de Z_n.
6. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. Déduire de la question précédente que

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie B. Fonction génératrice des p_n

On note R_p, le rayon de convergence de la série entière $\sum p_n x^n$ et f, la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Démontrer que $R_p \geqslant 1$.
8. Démontrer que

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \Big(\frac{-1}{2} - k + 1\Big)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
9. Déterminer un réel α tel que

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \quad f(x) = (1 - x^2)^\alpha.$$

Partie C. Loi de T

On note R_q, le rayon de convergence de la série entière $\sum q_n x^n$ et g, la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = q_n x^n.$$

10. Calculer q_1 et q_2.
11. Démontrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on admet la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, démontrer que

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.$$

Calculer le développement en série entière de g en précisant son rayon de convergence.
14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
15. En utilisant **[11.]** et **[13.]**, calculer $\mathbf{P}(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.
16. La variable aléatoire T est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ?

Solution I ❀ Intégrale de Dirichlet

Complément à caractère culturel
La fonction sin est concave sur $[0,\pi]$, donc

$$\forall\, t \in [0,\pi], \quad \sin t \leqslant t.$$

De plus,
$$\forall\, t \geqslant 1, \quad \sin t \leqslant 1 \leqslant t.$$

Donc
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \sin t \leqslant t.$$

Enfin, les deux fonctions étant impaires,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| \leqslant |t|.$$

Partie A. Préliminaires

1. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Comme $y_0 > 0$, on peut choisir $r = {}^{y_0}/_2 > 0$ et remarquer que la boule de centre M_0 et de rayon $r > 0$ (pour la norme euclidienne ou pour la norme produit par exemple) est contenue dans U. Ainsi, U est un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Variante 1. L'ensemble U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit cartésien de deux intervalles ouverts.
Variante 2. L'application $[(x,t) \mapsto t]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (elle est linéaire et $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension finie) et l'ensemble U est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ par cette application continue, donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
❧ L'application linéaire $[(x,t) \mapsto t]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction
$$\left[t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right]$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc la composée

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t & \longmapsto & \frac{\sin t}{t} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
L'application polynomiale $[(x,t) \mapsto -xt]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la composée

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & -xt & \longmapsto & \exp(-xt) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
En tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U.
❧ Si f, fonction de classe $\mathscr{C}^1$, atteint un maximum local en un point M_0 de l'ouvert U, alors le gradient $\nabla f(M_0)$ est nul. Or, en tout point $M = (x,t) \in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = -\sin t \cdot e^{-xt},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(M) = \frac{t\cos t - (1+xt)\sin t}{t^2} \cdot e^{-xt}.$$

Si la première dérivée partielle est nulle, alors il faut que $\sin t = 0$ et, pour que la deuxième dérivée partielle soit nulle elle aussi, alors il faut que

$$\frac{\pm 1}{t} \cdot e^{-xt} = 0,$$

ce qui est impossible.
La fonction f n'a donc pas de point critique sur l'ouvert U et par conséquent, elle n'atteint aucun maximum local sur U.
2. Soit $x > 0$.
Il est clair que la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$.
Lorsque t tend vers 0, on a $f(x,t) \sim 1$, donc la fonction est intégrable au voisinage de 0.
Lorsque t tend vers $+\infty$, on a $f(x,t) = \mathcal{O}(e^{-xt})$ avec $x > 0$, donc la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$.
La fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est donc intégrable sur I.
3. Soit $0 < a < b$. On intègre par parties sur $[a,b]$:

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

Il est clair que
$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1-\cos b}{b} = 0$$
et comme $1-\cos t \sim {}^{t^2}/_2$ lorsque t tend vers 0,
$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1-\cos a}{a} = 0.$$

Par conséquent, l'intégrale généralisée
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
converge si, et seulement si, l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$
converge et, dans ce cas, les deux intégrales sont égales.
❧ La fonction
$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}\right]$$
est continue sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$; elle tend vers ${}^1/_2$ au voisinage de $t = 0$ puisque $1-\cos t \sim {}^{t^2}/_2$ et est clairement $\mathcal{O}({}^1/_{t^2})$ au voisinage de $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur I et par conséquent l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$$
converge. Donc l'intégrale I converge.
4. Soit $x \geqslant 0$, fixé. La fonction $[t \mapsto u(x,t)]$ est clairement $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \left[-\frac{x\cos t - \sin t}{1+x^2} + x\frac{x\sin t + \cos t}{1+x^2}\right] e^{-xt} \\ &= \sin t\, e^{-xt}.\end{aligned}$$

REMARQUE.— On a trouvé cette primitive au moyen d'une double intégration par parties ou en prenant la partie imaginaire d'une primitive de $e^{(-x+i)t}$.

Partie B. Calcul de F sur $]0,+\infty[$

5. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|F(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(x,t)\right| \mathrm{d}t.$$

Or, d'après l'encadrement rappelé par l'énoncé,

$$\forall\, t>0,\quad \left|f(x,t)\right| = \frac{|\sin t|}{|t|}\, e^{-xt} \leqslant e^{-xt}.$$

Donc, par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x>0$,

$$\left|F(x)\right| \leqslant \frac{1}{x}.$$

❧ Comme $1/x$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

en appliquant le Théorème d'encadrement.

6. Nous allons appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$.

❧ Pour tout $t>0$, la fonction

$$[x \mapsto f(x,t)]$$

est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega = [0,+\infty[$, avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin t\, e^{-xt}.$$

❧ Pour tout $x>0$, la fonction

$$[t \mapsto f(x,t)]$$

est intégrable sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par **[2.]** et la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$

est intégrable sur I d'après la propriété de domination suivante.

❧ Pour tout $x \geqslant a$ et tout $t>0$, il est clair que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [a,+\infty[$ et intégrable sur I en tant que fonction de t, donc la fonction F est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et

$$\forall\, x \geqslant a,\quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

7. D'après la question précédente, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur

$$\bigcup_{a>0} [a,+\infty[\;=\;]0,+\infty[$$

et pour tout $x>0$,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

On déduit de **[4.]** que

$$\forall\, A>0,\quad -\int_0^{A} \sin t\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \big[-u(x,t)\big]_{t=0}^{t=A}$$

et comme $u(x,A)$ tend vers 0 lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$F'(x) = -\big(-u(x,0)\big) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

❧ Comme $]0,+\infty[$ est un intervalle, il existe une constante K telle que

$$\forall\, x>0,\quad F(x) = K - \operatorname{Arctan} x.$$

D'après **[5.]**, la fonction F tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc $K - \pi/2 = 0$. Par conséquent,

$$\forall\, x>0,\quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Partie C.

8. Nous allons appliquer le Théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale.

❧ Pour tout $t \in I =]0,1]$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est clairement continue sur $\Omega = [0,1]$.

❧ Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I car elle est continue sur I et tend vers une limite finie, égale à 1, lorsque t tend vers 0.

❧ Enfin, quels que soient $t \in I$ et $x \in \Omega$,

$$\left|f(x,t)\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$ et intégrable sur I (en tant que fonction constante sur un intervalle borné).

La fonction F_1 est donc continue sur $[0,1]$.

9. Soit $x \in \Omega = [0,1]$. Il est clair que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}\right]$$

est continue sur $I = [1,+\infty[$ et comme

$$\frac{u(x,t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/t^2),$$

elle est intégrable au voisinage de $+\infty$. Cette fonction est donc intégrable sur I.

❧ On intègre alors par parties grâce à **[4.]** : pour tout $A>1$,

$$\int_1^A f(x,t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_{t=1}^{t=A} + \int_1^A \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Il est clair que

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{u(x,A)}{A} = 0$$

et d'après ce qui précède,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, d'après **[2.]** (pour $x > 0$) et **[3.]** (pour $x = 0$),

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x,t)\,dt = \int_1^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$

On en déduit que

$$F_2(x) = -u(x,1) + \int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}\,dt$$

pour tout $x \in [0,1]$.

10. Comme il est clair que

$$[x \mapsto -u(x,1)]$$

est continue sur $[0,1]$, il reste à appliquer le Théorème de continuité.

❧ Pour tout $t \in I = [1,+\infty[$, la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}\right]$$

est clairement continue sur $\Omega = [0,1]$.

❧ Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}\right]$$

est intégrable sur I d'après **[9.]**

❧ Pour tout $x \in \Omega$, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1+x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in \Omega$ et évidemment intégrable sur $I = [1,+\infty[$.

La fonction F_1 est donc bien continue sur $[0,1]$.

11. D'après la relation de Chasles, $F = F_1 + F_2$. D'après les questions précédentes, la fonction F est donc continue sur $[0,1]$ et en particulier continue en 0.

Par définition et **[3.]**, $I = F(0)$. Comme F est continue en 0, on en déduit que

$$I = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} F(x)$$

et on déduit enfin de **[7.]** que

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Solution II ❀ Extrema d'une forme quadratique

Partie A. Étude d'un exemple

1. La boule unité fermée B_2 est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, espace vectoriel de dimension finie, donc B_2 est une partie compacte.

L'application f est continue (en tant qu'application polynomiale), donc elle atteint un maximum et un minimum sur le compact B_2.

2. Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont proportionnels si, et seulement si, leur déterminant est nul. Or

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1+2x_2 \\ x_2 & 2x_1+x_2 \end{vmatrix} = 2(x_1^2 - x_2^2),$$

donc les deux vecteurs sont proportionnels si, et seulement si, $x_2^2 = x_1^2$, c'est-à-dire $x_2 = \pm x_1$.

❧ Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de points situés sur S_2. On suppose que cette suite converge vers un point $L = (\ell_1, \ell_2)$ et il faut vérifier que $L \in S_2$.

Par hypothèse,

$$\ell_1 = \lim_{k\to+\infty} x_k, \qquad \ell_2 = \lim_{k\to+\infty} y_k$$

et

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_k^2 + y_k^2 = 1.$$

On en déduit que $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$ et donc que $L \in S_2$.

❧ La partie S_2 est donc fermée. Elle est aussi bornée (puisqu'elle est contenue dans la boule B_2) et comme $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension finie, la partie S_2 est une partie compacte.

Comme la fonction f est continue (elle est polynomiale), elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact S_2.

❧ Le cercle S_2 est une ligne de niveau d'une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$S_2 = \big[g(x_1,x_2) = 0\big] \quad \text{où} \quad g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

En tout point $M = (x_1, x_2) \in S_2$, le gradient de g est différent du vecteur nul car les dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$$

ne peuvent pas s'annuler en même temps (l'origine O n'appartient pas au cercle S_2).

Par conséquent, si la restriction à S_2 de la fonction f atteint un extremum en un point M, alors les deux gradients

$$\nabla f(M) = 2\cdot\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla g(M) = 2\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

doivent être proportionnels. Il faut donc que $x_2 = \pm x_1$ et comme $x_1^2 + x_2^2 = 1$, les seules possibilités sont les suivantes :

$$f\Big(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 3, \quad f\Big(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -1.$$

On en déduit que le maximum de f sur S_2 est égal à 3 et que son minimum est égal à -1.

3. Lorsque t varie de 0 à 2π, le couple $(\cos t, \sin t)$ parcourt le cercle unité S_2. Par conséquent, les extrema de la restriction à S_2 de f sont aussi les extrema de

$$g = [t \mapsto f(\cos t, \sin t)]$$

sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$g(t) = 1 + 2\sin 2t$$

donc

$$\max_{t\in[0,2\pi]} g(t) = g(\pi/4) = 3$$

$$\text{et} \quad \min_{t\in[0,2\pi]} g(t) = g(3\pi/4) = -1.$$

Autrement dit

$$\max_{(x_1,x_2)\in S_2} f(x_1,x_2) = f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 3$$
$$\text{et} \quad \min_{(x_1,x_2)\in S_2} f(x_1,x_2) = f\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = -1.$$

4. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'*ouvert* B_2' en tant qu'application polynomiale.

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1+4x_2 \quad \text{et que} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 4x_1+2x_2,$$

le point (x_1,x_2) est critique si, et seulement si,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

La fonction f a donc un seul point critique sur l'ouvert B_2' : il s'agit de l'origine $(0,0)$.

La hessienne de f est la même en tout point de $\mathbb{R}^2$:

$$\forall\, M \in B_2', \quad H_f(M) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Son déterminant est strictement négatif (-12), donc elle admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Par conséquent, $f(O)$ n'est pas un extremum local.

Variante — Il est clair que $f(x,0) = x^2 > 0$ et que $f(x,-x) = -2x^2 < 0$ pour tout $x \neq 0$, donc $f(O)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

5. On sait **[1.]** que l'application f atteint un maximum et un minimum sur B_2. Comme

$$B_2 = S_2 \sqcup B_2',$$

il n'y a que deux possibilités : ou bien f atteint son maximum sur l'ouvert B_2', ou bien f atteint son maximum sur la frontière S_2 (idem pour le minimum).

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, si elle atteint un extremum en un point de l'*ouvert* B_2', c'est nécessairement en un point critique et d'après la question précédente, cet extremum est égal à $f(0,0) = 0$.

Or f prend les valeurs $3 > 0$ et $-1 < 0$ sur S_2, donc f n'atteint ni son minimum, ni son maximum à l'origine. Par conséquent, f atteint son maximum <u>et</u> son minimum sur S_2. D'après **[3.]**,

$$\max_{x\in B_2} f(x) = \max_{x\in S_2} f(x) = 3$$
$$\text{et} \quad \min_{x\in B_2} f(x) = \min_{x\in S_2} f(x) = -1.$$

6. Ici, la matrice M_f est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2I_2 - J_2$$

donc

$$M + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

donc les valeurs propres de M_f sont -1 et 3, avec

$$\operatorname{Ker}(M_f + I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{Ker}(M_f - 3I_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

ce qui a un petit air de déjà vu...

Partie B. Cas général

7. D'après les règles du produit matriciel,

$$X^\top.M_f.X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i m_{i,j} x_j$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j$$

ou encore (en changeant d'indices dans la dernière somme)

$$\sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{j,i}x_ix_j.$$

Comme la matrice M_f est symétrique, on en déduit que

$$X^\top.M_f.X = \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j = f(x).$$

8. Quelles que soient les colonnes X et Y,

$$X^\top.M_f.X = X^\top.S.X,$$
$$Y^\top.M_f.Y = Y^\top.S.Y,$$
$$(X+Y)^\top.M_f.(X+Y) = (X+Y)^\top.S.(X+Y).$$

En développant la troisième égalité et en la simplifiant à l'aide des deux premières égalitées, on obtient

$$Y^\top.M_f.X + X^\top.M_f.Y = Y^\top.S.X + X^\top.S.Y.$$

Toute matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ étant symétrique, on déduit de la symétrie de M_f que

$$X^\top.M_f.Y = (X^\top.M_f.Y)^\top = Y^\top.M_f^\top.X = Y^\top.M_f.X.$$

Comme S est symétrique elle aussi, on en déduit que

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R}), \quad Y^\top.M_f.X = Y^\top.S.X.$$

En faisant varier X et Y dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad M_f(i,j) = S(i,j)$$

et donc que $M_f = S$.

9. La matrice M_f est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral) et il existe même une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}M_fQ$ soit diagonale.

10. Tout d'abord,

$$X^\top.X = \sum_{i=1}^{n} x_i 2 = \|x\|^2.$$

D'autre part, comme P est orthogonale, on a

$$P^{-1} = P^\top$$

et par conséquent

$$Y^\top.Y = (P^{-1}X)^\top.(P^{-1}X) = X^\top.(P.P^\top)X = X^\top.X.$$

11. Par hypothèse,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_n.$$

Comme les y_k^2 sont positifs,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_1 y_k^2 \leqslant \lambda_k y_k^2 \leqslant \lambda_n y_k^2$$

et en sommant

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 = Y^T D Y \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = Y^T Y = X^T X \leqslant 1$$

puisque $x \in B_n$.

Comme $\lambda_n > 0$ et $\lambda_1 < 0$, on en déduit que

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \lambda_n \|x\|^2 \leqslant \lambda_n.$$

Ainsi

$$\lambda_1 \leqslant Y^\top.D.Y \leqslant \lambda_n.$$

❧ D'après **[7.]**,

$$\begin{aligned} f(x) &= X^\top.M_f.X \\ &= X^\top(PDP^{-1})X = (P^{-1}X)^\top.D.(P^{-1}X) \\ &= Y^\top.D.Y. \end{aligned}$$

12. Pour les mêmes raisons qu'en **[1.]**, la fonction f atteint un maximum et un minimum sur B_n. D'après la question précédente,

$$\min_{x \in B_n} f(x) \leqslant -1 \quad \text{et} \quad 3 \leqslant \max_{x \in B_n} f(x).$$

Comme λ_1 et λ_n sont des valeurs propres de M_f, il existe des vecteurs propres x_1 et x_n de M_f associés respectivement à λ_1 et à λ_n. On peut supposer que ces vecteurs propres sont des vecteurs unitaires :

$$x_1 \in B_n \qquad x_n \in B_n$$

(puisque tout vecteur proportionnel à un vecteur propre est encore un vecteur propre).

Alors

$$f(x_1) = X_1^\top.M_f.X_1 = X_1^\top.(\lambda_1 X_1) = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$$

et de même $f(x_n) = \lambda_n$. Par conséquent,

$$\min_{x \in B_n} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \max_{x \in B_n} f(x) = 3.$$

13. L'étude précédente est encore valable pour le maximum :

$$\max_{x \in B_n} f(x) = \lambda_n.$$

En revanche, la minoration du **[11.]** est fausse puisque λ_1 est positive. On a cette fois

$$\forall\, x \in B_n, \quad 0 \leqslant \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant f(x)$$

et comme $f(0) = 0$, on en déduit que

$$\min_{x \in B_n} f(x) = 0.$$

Partie C. Application

14. Ici, la matrice M_f est constituée de 1 (sur la diagonale) et de -1 (en dehors de la diagonale) si bien que $M_f - 2I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à -1.

Comme $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = 1$, cette matrice admet 0 pour valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $(n-1)$. L'autre valeur propre est donc donnée par la trace : $-n$ est l'autre valeur propre de $(M_f - 2I_n)$.

Tout vecteur propre de $(M_f - 2I_n)$ est aussi un vecteur propre de I_n, donc de M_f. Les valeurs propres de M_f s'en déduisent :

$$\mathrm{Sp}\, M_f = \{-n+2 \quad ; \quad 2\}.$$

Comme $n \geqslant 3$, on en déduit que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = -n+2 < 0 < \lambda_n = 2$$

et donc que

$$\min_{x \in B_n} f(x) = -n+2 \quad \text{et} \quad \max_{x \in B_n} f(x) = 2$$

d'après **[12.]**

REMARQUE.— La matrice M_f est donc un polynôme en J_n :

$$M_f = -J_n + 2I_n$$

donc chaque vecteur propre de J_n est aussi un vecteur propre de M_f. On en déduit que l'hyperplan propre associé à 2 admet

$$[x_1 + \cdots + x_n = 0]$$

pour équation et la droite propre associée à $(2-n)$ est dirigée par la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

On retrouve alors les valeurs extrêmes de f en choisissant des vecteurs propres unitaires, comme

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}^\top.$$

Solution III ❀ Retour à l'origine d'une marche aléatoire

Complément à caractère culturel

❧ S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n(\omega) = 0$, alors l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N}^* \,:\, S_n(\omega) = 0\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet de ce fait un plus petit élément. L'application T est donc bien définie.

❧ Il reste à vérifier que T est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour cela, il faut d'abord remarquer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [S_n = 0] \in \mathcal{A}$$

puisque S_n est une variable aléatoire. On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad [S_n = 0]^c \in \mathcal{A}$$

puisqu'une tribu est stable par passage au complémentaire.

D'une part,

$$[T = +\infty] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [S_n = 0]^c \in \mathcal{A}$$

en tant qu'intersection dénombrable d'événements.

D'autre part, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$[T = n] = [S_1 = 0]^c \cap \cdots \cap [S_{n-1} = 0]^c \cap [S_n = 0] \in \mathcal{A}$$

en tant qu'intersection d'un nombre fini d'événéments.

Partie A. Calcul de p_n

1. Chaque variable X_k représente le *déplacement* effectué entre l'instant $(k-1)$ et l'instant k, la variable S_n représente donc la *position* à l'instant n.

2. Comme $S_0(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$p_0 = \mathbf{P}(S_0 = 0) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Comme $S_1(\omega) = X_1(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$p_1 = \mathbf{P}(S_1 = 0) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

Enfin, en décomposant sur le système complet d'événements $([X_1 = 1], [X_1 = -1])$,

$$\begin{aligned}[S_2 = 0] &= [X_1 = -X_2] \\ &= [X_1 = 1, X_2 = -1] \sqcup [X_1 = -1, X_2 = 1].\end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$,

$$\begin{aligned}p_2 &= \mathbf{P}(X_1 = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = -1) + \mathbf{P}(X_1 = -1)\,\mathbf{P}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Comme $X_k(\omega) = \pm 1$, les deux ensembles

$$\{1 \leqslant k \leqslant n : X_k(\omega) = 1\} \quad \text{et} \quad \{1 \leqslant k \leqslant n : X_k(\omega) = -1\}$$

définissent une partition de $\{1, \dots, n\}$. La somme de leurs cardinaux est donc égale à n.

Si $S_n(\omega) = 0$, alors ces deux ensembles ont même cardinal m et par conséquent, $n = 2m$ est un entier pair.

Par contraposée, si n est impair, alors $[S_n = 0]$ est vide et par conséquent $p_n = 0$.

4. Comme X_k prend les valeurs ± 1, alors Y_k prend les valeurs $(\pm 1 + 1)/2$, c'est-à-dire 0 ou 1 avec

$$[Y_k = 1] = [X_k = 1] \quad \text{et} \quad [Y_k = 0] = [X_k = -1].$$

Donc Y_k suit bien une loi de Bernoulli. Le paramètre de cette loi est

$$\mathbf{P}(Y_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

5. Remarque à caractère culturel

Il existe une fonction (affine!) f telle que $Y_k = f(X_k)$ pour tout $k \geqslant 1$. Comme les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes et de même loi, les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions) et de même loi (c'est la même fonction f pour toutes les variables).

❧ En tant que somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$, la variable Z_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

❧ Puisque $X_k = 2Y_k - 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2Y_j - 1) = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big) - n = 2Z_n - n.$$

6. D'après la question précédente,

$$[S_{2m} = 0] = [2Z_n = n] = [Z_{2m} = m]$$

et comme Z_{2m} suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2m, 1/2)$,

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}.$$

REMARQUE.— On peut donner une interprétation combinatoire de cette expression : on choisit m indices parmi les $n = 2m$ indices pour situer les montées ; chacune des m montées est effectuée avec la probabilité $1/2$ et chacune des m descentes est effectuée avec la probabilité $1/2$.

Partie B. Fonction génératrice des p_n

7. Comme p_n est une probabilité, on a évidemment

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < x < 1, \quad 0 \leqslant p_n x^n \leqslant x^n.$$

Pour $0 < x < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ est convergente, donc la série $\sum p_n x^n$ est convergente (par comparaison).

Comme la série entière $\sum p_n x^n$ converge au moins sur $]0, 1[$, cela prouve que le rayon de convergence est au moins égal à 1.

REMARQUE.— Le rapport du jury indique que de nombreux candidats ont cru que la série $\sum p_n$ était convergente. Cela s'explique par une lecture inattentive du titre de la partie : la fonction f est bien une fonction génératrice, mais ce n'est pas la fonction génératrice d'une variable aléatoire! En effet, les événements $[S_n = 0]$ ne constituent pas le système complet d'événements associés à une variable aléatoire...

8. Pour tout $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(-1)^m \prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{-1}{2}-k+1\Big) &= \prod_{k=1}^{m}\frac{1+2k-2}{2}\\ &= \frac{1}{2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\\ &= \frac{1}{2^m}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k(2k-1)}{2k}\\ &= \frac{(2m)!}{2^m.(2^m m!)}\end{aligned}$$

et on retrouve ainsi l'expression de p_{2m} calculée au **[7.]**

9. On sait que

$$\forall\, u \in\,]-1,1[\,,\quad (1+u)^\alpha = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m u^m$$

avec $c_0 = 1$ et

$$\forall\, m \geqslant 1,\quad c_m = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}.$$

Pour $x \in\,]-1,1[$, on a $-1 < -x^2 \leqslant 0$ et donc

$$(1-x^2)^\alpha = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m(-x^2)^m = \sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m c_m x^{2m}.$$

Or, d'après **[7.]** et **[3.]**,

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{2m}x^{2m}$$

et d'après la question précédente, $p_{2m} = (-1)^m c_m$ pour $\alpha = -1/2$.

On a donc

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Partie C. Loi de T

10. On a

$$\begin{aligned}q_1 &= \mathbf{P}(T=1) = \mathbf{P}(S_1 = 0)\\ q_2 &= \mathbf{P}(T=2) = \mathbf{P}(S_1 \neq 0, S_2 = 0)\end{aligned}$$

et d'après **[2.]**

$$q_1 = 0,\qquad q_2 = \frac{1}{2}.$$

11. Pour tout $x \in [-1,1]$, il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad \big|g_n(x)\big| \leqslant q_n = \mathbf{P}(T=n).$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [-1,1]$.

Comme les événements $[T=n]$ sont deux à deux disjoints, la série $\sum \mathbf{P}(T=n)$ est convergente (σ-additivité de $\mathbf{P}$), donc la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur le segment $[-1,1]$.

❧ En particulier, la série $\sum g_n(x)$ converge absolument pour tout $|x| \leqslant 1$, ce qui prouve que le rayon de convergence R_q est au moins égal à 1.

12. Le produit de Cauchy des séries entières $\sum p_n x^n$ et $\sum q_n x^n$ est la série entière $\sum w_n x^n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad w_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

D'après **[7.]**, on a $R_p \geqslant 1$ et d'après **[11.]**, on a $R_q \geqslant 1$. Par conséquent, pour $|x| < 1$ (au moins !), la série $\sum w_n x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\Big) = f(x)g(x).$$

D'après l'énoncé,

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,}\qquad w_n = p_n.$$

En outre, $w_0 = p_0 q_0 = 0$ (puisque $q_0 = 0$), donc

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = f(x) - p_0\\ &= f(x) - 1. \qquad \text{(par [2.])}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

13. On connaît l'expression de $f(x)$ depuis **[12.]** et on déduit de la question précédente que

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

❧ Le développement en série entière de $(1+u)^{1/2}$ est connu, son rayon de convergence est égal à 1 et les coefficients sont donnés par la formule rappelée au **[9.]** Cette fois, $\alpha = 1/2$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdots(3-2n)}{2^n.n!}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\cdot[1\cdot 3\cdots(2n-3)]\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)}{2^{2n-1}\cdot n!(n-1)!}\end{aligned}$$

avec $c_0 = 1$ bien sûr.

Pour $|x| < 1$, on a $u = -x^2 \in\,]-1,1[$ et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(-x^2)^n\\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\cdot n!(n-1)!}\cdot x^{2n}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\cdot\frac{x^{2n}}{2^{2n-1}}$$

pour tout $x \in\,]-1,1[$.

14. Comme le rayon de convergence est strictement positif (il est égal à 1), on peut invoquer l'unicité du développement en série entière. On déduit de l'expression précédente que

$$q_0 = 0,\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\quad q_{2n+1} = 0$$

et que
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad q_{2n} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\cdot n!(n-1)!}.$$

15. Par **[11.]**, la fonction g est continue sur $[-1,1]$. En particulier,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = g(1) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} 1 - \sqrt{1-x^2} = 1.$$

Or
$$\Omega = [T=+\infty] \sqcup \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} [T=n]$$

et par σ-additivité de $\mathbf{P}$,
$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(T=+\infty) + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n.$$

On en déduit que $\mathbf{P}(T=+\infty) = 0$, ce qui signifie que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe au moins un entier $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) = 0$.

16. Comme g est la fonction génératrice de T, on sait que T est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, g est dérivable au point 1.

Pour $0 < x < 1$, on déduit de **[13.]** que
$$\frac{g(1)-g(x)}{1-x} = \frac{1-(1-\sqrt{1-x^2})}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Cela prouve que g n'est pas dérivable au point 1 (le taux d'accroissement tend vers $+\infty$) et donc que T n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie.