Espaces vectoriels normés de dimension finie

I

Topologie des espaces de dimension finie

1. On fait le bilan des propriétés particulières aux espaces vectoriels normés de dimension finie en donnant quelques applications remarquables au passage.

I.1 Équivalence des normes

2. Toutes les normes sur $\mathbb{K}^d$ sont équivalentes [**19.32**].

2.1 Pour tout espace vectoriel E de dimension d sur $\mathbb{K}$, il existe un isomorphisme de $\mathbb{K}^d$ sur E. Quel que soit cet isomorphisme φ, quelle que soit la norme N sur E, l'application

$$N^{\varphi} = \left[x \mapsto N\big(\varphi(x)\big)\right]$$

est une norme sur $\mathbb{K}^d$ et $\varphi : (\mathbb{K}^d, N^{\varphi}) \to (E, N)$ est une isométrie.

2.2 ➙ *Sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes les normes sont équivalentes.*

2.3 Toutes les normes sur E définissent donc la même topologie : deux normes définissent les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes suites convergentes, les mêmes compacts, les mêmes applications lipschitziennes, les mêmes fonctions continues... →[**19.30**]

On s'abstient donc en général de préciser la norme considérée et on se contente de dire que E est muni de sa ***topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie***.

2.4 En certaines occasions, la norme doit être précisée : c'est le cas en particulier lorsqu'on veut calculer la norme subordonnée d'une application linéaire.

3. Tout sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

4. Parties compactes

Le théorème de Bolzano–Weierstrass s'étend à tout espace vectoriel normé de dimension finie.

4.1 ➙ *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie E sont les parties fermées et bornées de E.* →[**19.22.2**]

4.2 ➙ *Les boules fermées et les sphères sont compactes.*

4.3 ➙ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie (E, N), on peut extraire une suite convergente dans E pour N.

I.2 Limites et continuité

5. L'espace vectoriel de dimension finie E est rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$. Les formes linéaires coordonnées sont notées $e_1^*, \dots, e_d^*$:

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(x) \cdot e_k.$$

6. Continuité des formes coordonnées [5]

6.1 L'application définie par

$$\forall\, x \in E, \quad N_{\mathscr{B}}(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \left|e_k^*(x)\right|$$

est une norme sur E.

6.2 Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la forme coordonnée e_k^* est continue de E dans $\mathbb{K}$ et l'application définie par

$$\Phi_{\mathscr{B}} = \left[(x_1, \dots, x_d) \mapsto \sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right]$$

est continue de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$ dans E, quelle que soit la norme choisie sur E.

6.3 Si E est muni de la norme $N_{\mathscr{B}}$, alors

$$\forall\, x \in E, \forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \left|e_k^*(x)\right| \leqslant N_{\mathscr{B}}(x)$$

et $\Phi_{\mathscr{B}}$ est une isométrie.

6.4 ➙ *Toute fonction polynomiale des coordonnées :*

$$x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{N}^d} \left[e_1^*(x)\right]^{m_1} \left[e_2^*(x)\right]^{m_2} \cdots \left[e_d^*(x)\right]^{m_d} u_m$$

est continue sur E.

6.5 ➙ *Toute fonction rationnelle des coordonnées est continue sur son ensemble de définition.*

7. Suites [5]

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut étudier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E en ne considérant que les suites des *coordonnées* des vecteurs u_n relatives à une base arbitrairement choisie (sans se soucier de la norme choisie sur E).

7.1 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad u_n[k] = e_k^*(u_n)$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \Phi_{\mathscr{B}}\big(u_n[1], \dots, u_n[d]\big).$$

7.2 ➙ *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de E et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(u_n[1], \dots, u_n[d])$, la famille des coordonnées de u_n relatives à une base $\mathscr{B}$.*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans E (quelle que soit la norme choisie sur E) si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la suite $(u_n[k])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell[k] = e_k^*(\ell)$ dans $\mathbb{K}$.

8. Séries [5]

Par définition, une série $\sum u_n$ de vecteurs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles converge.

8.1 ✍ *Une série $\sum u_n$ de vecteurs de E est* **absolument convergente pour la norme** $\|\cdot\|$ *si, et seulement si, la série de terme général positif $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

8.2 ➙ *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute série absolument convergente est convergente.*

8.3 Dans un espace de dimension infinie, une série peut être absolument convergente pour une norme N_1 sans être absolument convergente pour une autre norme N_2 et la convergence absolue n'implique pas toujours la convergence...

9. Sous-espaces de E

Soit F, un sous-espace de dimension finie de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de F qui converge vers $\ell \in E$.

9.1 Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}\| \leqslant 2^{-k}.$$

9.2 La série $\sum(u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)})$ converge et sa somme appartient à F.

9.3 ➙ *Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Tout sous-espace de dimension finie de E est une partie fermée.*

10. Fonctions continues [5]
On considère une fonction $f : A \to E$ où $A \subset F$. Pour tout $x \in A$, on pose
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad f_k(x) = (e_k^* \circ f)(x)$$
de telle sorte que
$$\forall\, x \in A, \quad f(x) = \Phi_{\mathscr{B}}\big(f_1(x), \dots, f_d(x)\big).$$

10.1 ➙ *Soit f, une fonction à valeurs dans E et $f_1, \dots, f_d$, les composantes de f relatives à une base $\mathscr{B}$ de E.*
La fonction f tend vers $\ell \in E$ au voisinage de a (quelle que soit la norme choisie sur E) si, et seulement si, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant d$, l'application f_k tend vers $e_k^*(\ell)$ au voisinage de a.

10.2 Une application $f : A \to \mathbb{K}^d$ définie par
$$\forall\, x \in A, \quad f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_d(x)\big)$$
est continue en $a \in A$ si, et seulement si, $f_k : A \to \mathbb{K}$ est continue en $a \in A$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$.

11. ➙ Applications linéaires
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. On suppose que la dimension de E est finie.
Toute application linéaire f de E dans F est continue.

12. Applications bilinéaires [19.18.3]

12.1 Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on suppose que N_k et $\|\cdot\|_k$ sont des normes équivalentes sur E_k. Alors les normes définies sur l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ par
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \|x_k\|_k \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} N_k(x_k)$$
sont équivalentes.

12.2 Soit φ, une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.
Pour tout $x_1 \in E_1$, l'application
$$\Phi_g(x_1) = [x_2 \mapsto \varphi(x_1, x_2)]$$
est une application linéaire de E_2 dans F et l'application
$$\Phi_g = \big[x_1 \mapsto \Phi_g(x_1)\big]$$
est une application linéaire de E_1 dans $\mathrm{L}(E_2, F)$.

12.3 ➙ *Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels de dimension finie, toute application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F est continue, quelles que soient les normes considérées sur E_1, E_2 et F.*

12.4 Si E est un espace de dimension finie, alors la composition
$$[(u, v) \mapsto u \circ v]$$
est bilinéaire de $\mathrm{L}(E) \times \mathrm{L}(E)$ dans $\mathrm{L}(E)$.
Quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ sur E, il existe une constante $K > 0$ telle que
$$\forall\, (u, v) \in \mathrm{L}(E) \times \mathrm{L}(E), \quad \|u \circ v\| \leqslant K\|u\|\,\|v\|.$$

12.5 Sur un espace de dimension finie E, les ***formes quadratiques*** :
$$q = [x \mapsto \varphi(x, x)]$$
(où φ est une forme bilinéaire) sont continues et il existe une constante $K > 0$ telle que
$$\forall\, x \in E, \quad \big|q(x)\big| \leqslant K\|x\|^2.$$

I.3 Espaces de matrices

13. Convergence des suites de matrices
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note
$$A = \big(A[i,j]\big)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}.$$

13.1 ➙ *Quelle que soit la norme choisie sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice L si, et seulement si,*
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad L[i,j] = \lim_{k \to +\infty} A_k[i,j].$$

13.2 Le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures est fermé dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

13.3 ➙ *Soient $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de matrices de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite de matrices colonnes dans $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$.*
Si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A et si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X, alors la suite de matrices colonnes $(A_k X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers AX.

Exemples de parties denses

14. Densité des matrices inversibles

14.1 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de scalaires de limite nulle telle que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A - \lambda_k I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

14.2 * *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

15. Densité des matrices diagonalisables

15.1 Soit N, une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice triangulaire $T_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable T telle que $N(T - T_0) \leqslant \varepsilon$.

15.2 Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'application $\big[M \mapsto P^{-1}MP\big]$ est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

15.3 * *L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

Applications continues usuelles

16. ➙ *La trace est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.*

17.1 ➙ *L'application* det *est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.*

17.2 ➙ *Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

17.3 Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = [\det M = 1]$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas compact si $n \geqslant 2$.

18.1 ➙ *La transposition est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

18.2 ➙ *Les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont des fermés de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

18.3 L'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas un compact.

18.4 L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, mais ce n'est pas un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

18.5 ➙ *Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des rotations sont des parties compactes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

19. Formules de Cramer

19.1 Une fonction $f : A \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall\, x \in A, \quad f(x) = \big(f_{i,j}(x)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$$
est continue en $a \in A$ si, et seulement si, $f_{i,j} : A \to \mathbb{K}$ est continue en $a \in A$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant p$.

19.2 ➙ *L'application $\big[A \mapsto A^{-1}\big]$ de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.*

Entraînement

20. Questions pour réfléchir

1. Soient $(F, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et E, un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Alors, pour tout $x_0 \in F$,

$$\mathrm{d}(x_0, E) = \min_{y \in E} \mathrm{d}(x_0, y).$$

2. *Suite de* [6.1] – Si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $E = \mathbb{K}^d$, la norme $N_{\mathscr{B}}$ est la norme produit sur $\mathbb{K}^d$.

3. Soient $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$, une famille libre de vecteurs de E et f_1, …, f_r, des applications de Ω dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall\, h \in \Omega, \quad f(h) = \sum_{k=1}^{r} f_k(h) \cdot \varepsilon_k.$$

Alors, lorsque $h \in \Omega$ est voisin de 0,

$$f(h) = o(h) \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad f_k(h) = o(h).$$

4. Comparer [7] avec [**19**.7.2].

5. *Suite de* [7] – Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^d$ tend vers l'infini, que dire des suites des coordonnées $(u_n[k])_{n\in\mathbb{N}}$ relatives à une base de $\mathbb{K}^d$?

6. Peut-on caractériser le fait que f tende vers l'infini au voisinage de a par le comportement des composantes f_1, …, f_d de f au voisinage de a ?

7. Si l'application $f : E \to F$ est linéaire et si la dimension de E est finie, l'expression $\|f(x)\|_F$ atteint-elle un maximum sur la boule unité ouverte de E ?

8. On suppose que $E_1, \dots, E_p$ sont des espaces de dimension finie. Pour toute application p-linéaire φ de E dans un espace vectoriel normé F, il existe une constante $K_\varphi > 0$ telle que

$$\|\varphi(x)\|_F \leqslant K_\varphi \|x_1\|_1 \, \|x_2\|_2 \cdots \|x_p\|_p$$

pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. Que peut-on en déduire sur φ ? Exemples ?

9. S'il existe une matrice colonne non nulle $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $(\lambda_k X)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λX dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors la suite scalaire $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λ dans $\mathbb{K}$.

10. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures et inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est-il ouvert ? fermé ?

11. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Si une matrice $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est assez proche de A (pour une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$), alors le discriminant du polynôme caractéristique de B est strictement négatif. Comparer avec [15.3].

21. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \geqslant \alpha \|x\|_E$$

et f est injective si, et seulement si, on peut choisir $\alpha > 0$. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to\infty} \|f(x)\|_F = \infty.$$

22. On note $P \wedge Q$, le plus grand commun diviseur (unitaire) des polynômes P et Q.

1. L'application $[P \mapsto (P, P')]$ est continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$

2. Comme la suite de terme général $P_n = X(X - 2^{-n})$ converge vers X^2, l'application $[P \mapsto P \wedge P']$ n'est pas continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X]$.

23. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, deux normes sur E, espace de dimension finie. Pour toute application linéaire $f : E \to F$, on pose

$$|||f|||_1 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|f(x)\|_F \quad \text{et} \quad |||f|||_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|f(x)\|_F.$$

Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall\, f \in \mathrm{L}(E, F), \quad \alpha |||f|||_1 \leqslant |||f|||_2 \leqslant \beta |||f|||_1.$$

24. Sous-espaces de E

Soit E, un espace de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$.

24.1 Soit ε, un vecteur non nul. La droite vectorielle dirigée par ε est fermée.

24.2 Soient H, un sous-espace fermé de E et ε, un vecteur n'appartenant pas à H.

1. On définit une norme sur le sous-espace $F = H \oplus \mathbb{K} \cdot \varepsilon$ en posant

$$\forall\, u = v + \lambda \cdot \varepsilon \in F, \quad N(u) = \max\{\|v\|, |\lambda|\}.$$

2. Si la suite de terme général

$$u_n = v_n + \lambda_n \cdot \varepsilon \in F$$

converge pour la norme $\|\cdot\|$, alors elle est bornée pour la norme N et il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les deux suites $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

24.3 ➛ *Soit $(F, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Tout sous-espace de dimension finie de F est une partie fermée de $(F, \|\cdot\|)$.*

II

Dérivation

25. Toutes les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.

Cet espace E est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie. Si nécessaire, on pourra considérer la norme $N_{\mathscr{B}}$ associée à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E. →[6.1]

Les composantes relatives à la base $\mathscr{B}$ d'une fonction f seront notées f_1, …, f_d :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad f_k = e_k^* \circ f.$$

On peut reconstituer la fonction f à partir de ses composantes au moyen de la formule suivante.

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{d} f_k(t) e_k$$

II.1 Fonctions dérivables

26. Dérivabilité en un point

26.1 ✍ *Soient $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. La fonction f est* **dérivable en** *t_0 lorsque le taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite (dans E) lorsque t tend vers t_0.
Cette limite est notée $f'(t_0)$ ou $D(f)(t_0)$.

26.2 La fonction f est dérivable en t_0 si, et seulement si, ses composantes f_1, …, f_d sont dérivables en t_0 et, dans ce cas,

$$f'(t_0) = \sum_{k=1}^{d} f_k'(t_0) e_k.$$

26.3 La fonction $f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$ si, et seulement si, il existe $a \in E$ tel que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)a + o(t - t_0)$$

lorsque t tend vers t_0 et, dans ce cas, $f'(t_0) = a$.

26.4 Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0 (et en particulier définie en t_0).

27. Tangentes

Le ***graphe*** de la fonction $f : I \to E$ est une partie de l'espace affine $\mathbb{R} \times E$.

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)),\ x \in I\}$$

27.1 ✍ *Si $f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$, la droite d'équation*

$$[x = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0)]$$

est la **tangente** *au graphe de f au point d'abscisse t_0.*

27.2 La tangente au graphe de f au point d'abscisse t_0 est une droite affine de $\mathbb{R} \times E$ représentée paramétriquement par

$$(t_0, f(t_0)) + \mathbb{R} \cdot (1, f'(t_0)).$$

28. Dérivabilité à gauche et à droite

Pour qu'une fonction soit dérivable à droite en t_0, il faut qu'elle soit définie en t_0, mais aussi que l'intervalle $I \cap [t_0, +\infty[$ ne soit pas réduit à $\{t_0\}$.

28.1 ✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **dérivable à droite** *en $t_0 \in I$ lorsque $t_0 \neq \max(I)$ et que le taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite dans E, notée $f'_d(t_0)$, lorsque t tend vers t_0 par valeurs strictement supérieures.

28.2 ✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **dérivable à gauche** *en $t_0 \in I$ lorsque $t_0 \neq \min(I)$ et que le taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite dans E, notée $f'_g(t_0)$, lorsque t tend vers t_0 par valeurs strictement inférieures.

28.3 La fonction $f : I \to E$ est dérivable à droite en $t_0 \in I$ si, et seulement si, sa restriction à $I \cap [t_0, +\infty[$ est dérivable en t_0.

28.4 Si f est dérivable à droite en t_0, alors f est continue à droite en t_0.

28.5 ➞ *Si t_0 est un point intérieur à I, la fonction $f : I \to E$ est dérivable en t_0 si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en t_0 et si $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$.*

28.6 Si $f : [a, b] \to E$, alors f est dérivable à droite en a (resp. dérivable à gauche en b) si, et seulement si, f est dérivable en a (resp. dérivable en b).

28.7 La fonction $f : I \to E$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en t_0 si, et seulement si, il existe $a \in E$ tel que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot a + o(t - t_0)$$

pour tout t dans un voisinage de t_0 relatif à $]t_0, +\infty[$ (resp. dans un voisinage de t_0 relatif à $]-\infty, t_0[$).

29. Demi-tangentes

29.1 ✍ *Si $f : I \to E$ est dérivable à droite en $t_0 \in I$, alors la* **demi-tangente à droite** *au point d'abscisse t_0 du graphe de f est le graphe de la fonction φ_d définie par*

$$\forall\, t \geqslant t_0, \quad \varphi_d(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'_d(t_0).$$

29.2 ✍ *Si $f : I \to E$ est dérivable à gauche en $t_0 \in I$, alors la* **demi-tangente à gauche** *au point d'abscisse t_0 du graphe de f est le graphe de la fonction φ_g définie par*

$$\forall\, t \leqslant t_0, \quad \varphi_g(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'_g(t_0).$$

30. Fonctions dérivables sur un intervalle

30.1 ✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **dérivable (sur I)** *lorsqu'elle est dérivable en tout point $t_0 \in I$. Dans ce cas, la fonction de I dans E définie par $[t \mapsto f'(t)]$ est la fonction* **dérivée** *de f.*

30.2 ✍ *La fonction $f : I \to E$ est une fonction* **de classe $\mathscr{C}^1$ (sur I)** *lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.*

30.3 ➞ *Une fonction $f : I \to E$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, sa composante*

$$f_k = e_k^* \circ f : I \to \mathbb{K}$$

est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et →**[31.3]**

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = \sum_{k=1}^{d} f'_k(t) e_k.$$

31. Linéarité

31.1 ➞ *Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.*

31.2 La dérivation $[f \mapsto f']$ est une application linéaire de $\mathscr{C}^1(I, E)$ dans $\mathscr{C}^0(I, E)$.

31.3 ➞ *Soient $f : I \to E$, une fonction dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et $T : E \to F$, une application linéaire. Alors $T \circ f : I \to F$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et* →**[30.3]**

$$(T \circ f)' = T \circ (f').$$

31.4 ➞ *Si $A : I \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une fonction dérivable, alors la fonction $QAP : I \to \mathfrak{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ est dérivable quelles que soient les matrices $Q \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et*

$$\frac{\mathrm{d}(QA_tP)}{\mathrm{d}t} = Q\,\frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t}\,P.$$

32. ➞ Dérivation d'une fonction composée

Soient I et J, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si les fonctions $\varphi : I \to J$ et $f : J \to E$ sont dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^1$), alors $f \circ \varphi : I \to E$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t)).$$

II.2 Formule de Leibniz

33. Le théorème **[34]** établit la dérivabilité d'un produit de fonctions dérivables et donne en outre la formule qui exprime la dérivée de ce produit : la ***formule de Leibniz***.

Par *produit*, il faut entendre ici toute application bilinéaire continue. →**[12.3]**

34. ➞ *Soient E, F et G, trois espaces vectoriels normés de dimension finie et $B : E \times F \to G$, une application bilinéaire.*

Si les fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables, alors la fonction $h = B(f, g)$ est dérivable de I dans G et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors h est de classe $\mathscr{C}^1$.

35. Fonctions polynomiales et rationnelles [25]

On suppose que la fonction $f : I \to E$ est dérivable.

35.1 Toute fonction polynomiale des composantes $f_1, \dots, f_d$ est dérivable sur I et sa dérivée est une fonction polynomiale des composantes de f et de f'.

35.2 Toute fonction rationnelle des composantes $f_1, \dots, f_d$ est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est une fonction rationnelle des composantes de f et de f'.

36. Applications usuelles de la formule de Leibniz

Tous les exemples sont énoncés pour des fonctions dérivables, mais sont encore valides pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

36.1 On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Si les fonctions $f : I \to \mathbb{R}^3$ et $g : I \to \mathbb{R}^3$ sont dérivables, alors la fonction $h = [t \mapsto f(t) \wedge g(t)]$ est dérivable de I dans $\mathbb{R}^3$ et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

36.2 Si les fonctions $x_k : I \to \mathbb{K}$ et $\varepsilon_k : I \to E$ sont dérivables pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, alors la fonction $f : I \to E$ définie par

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{d} x_k(t)\varepsilon_k(t)$$

est dérivable et

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = \sum_{k=1}^{d} \big[x_k'(t)\varepsilon_k(t) + x_k(t)\varepsilon_k'(t)\big].$$

36.3 Si $A : I \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont deux fonctions dérivables, alors la fonction $B = [t \mapsto A_t X_t]$ est dérivable de I dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et

$$\forall\, t \in I, \quad B_t' = A_t' X_t + A_t X_t'.$$

36.4 On suppose que $F = E$, que B est un produit scalaire sur E et que les fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to E$ sont dérivables.

1. Les fonctions $\langle\, f \,|\, g \,\rangle : I \to \mathbb{K}$ et $\|f\|^2 : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle\, f(t) \,|\, g(t) \,\rangle}{\mathrm{d}t} = \langle\, f'(t) \,|\, g(t) \,\rangle + \langle\, f(t) \,|\, g'(t) \,\rangle,$$

$$\frac{\mathrm{d}\|f(t)\|^2}{\mathrm{d}t} = 2\,\mathfrak{Re}\,\langle\, f(t) \,|\, f'(t) \,\rangle.$$

2. Si f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}\|f(t)\|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathfrak{Re}\,\langle\, f(t) \,|\, f'(t) \,\rangle}{\|f(t)\|}.$$

3. Si E est un espace euclidien ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et si $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$, alors

$$\forall\, t \in I, \quad \langle\, f(t) \,|\, f'(t) \,\rangle = 0.$$

36.5 Soient E, un plan vectoriel et $\mathscr{B}$, une base de E. Si f et g sont deux fonctions dérivables de I dans E, alors

$$h = \big[t \mapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f(t), g(t)\big)\big]$$

est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$ et

$$h'(t) = \det_{\mathscr{B}}\big(f'(t), g(t)\big) + \det_{\mathscr{B}}\big(f(t), g'(t)\big)$$

pour tout $t \in I$.

36.6 Soit E, une algèbre de dimension finie. Le produit de deux fonctions dérivables de I dans E est une fonction dérivable sur I.

1. Soit $E = \mathrm{L}(V)$, où V est un espace vectoriel normé de dimension finie. Si les deux fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to E$ sont dérivables, alors $h = [t \mapsto f(t) \circ g(t)]$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g'(t).$$

2. Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2.a Si les fonctions $A : I \to E$ et $B : I \to E$ sont dérivables, alors $C = [t \mapsto A_t B_t]$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad C_t' = A_t' B_t + A_t B_t'.$$

2.b Si $P : I \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable et si $P_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $t \in I$, alors $Q = [t \mapsto P_t^{-1}]$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}t} = -P_t^{-1} P_t' P_t^{-1}.$$

37. * *Soient E, un espace vectoriel de dimension $d \geqslant 2$ et $\mathscr{B}$, une base de E. Quelles que soient les fonctions dérivables $f_1, \dots, f_d$ de I dans E, l'application*

$$F = \big[t \mapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f_1(t), \dots, f_d(t)\big)\big]$$

est dérivable de I dans $\mathbb{K}$ et

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{d} \det_{\mathscr{B}}\big(f_1(t), \dots, f_k'(t), \dots, f_d(t)\big)$$

pour tout $t \in I$.

II.3 Accroissements finis

38. On parle d'***accroissements finis*** pour désigner les variations

$$f(y) - f(x)$$

par opposition aux *accroissements infiniment petits*

$$f(x_0 + \delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\delta x$$

qui apparaissent quand on relie une fonction et sa dérivée.

38.1 ➙ **Égalité des accroissements finis**
Si une fonction f à valeurs réelles est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $a < c < b$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$

38.2 Le théorème **[38.1]** repose sur le ***théorème de Rolle*** et en particulier sur le fait qu'une fonction à valeurs *réelles* admette un extremum sur tout segment.

38.3 La fonction définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ pour tout réel t est dérivable et, bien que $f(0) = f(2\pi)$, sa dérivée n'est jamais nulle.

38.4 à défaut pouvoir généraliser l'*égalité* des accroissements finis aux fonctions à valeurs vectorielles, on peut leur étendre l'inégalité des accroissements finis **[38.5]** qui rend en définitive les mêmes services que **[38.1]**. →**[39]**

38.5 ➙ *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est lipschitzienne sur I si, et seulement si, sa dérivée est bornée sur I.*

39. Inégalité des accroissements finis
Le théorème des accroissements finis peut être démontré sous des hypothèses moins restrictives que celles du théorème suivant. →**[103]**

39.1 ➙ *Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace vectoriel de dimension finie E.*
S'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \|f'(t)\| \leqslant K,$$

alors f est K-lipschitzienne sur I.

39.2 *Suite de* **[38.5]** –

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |e^{iy} - e^{ix}| \leqslant |x - y|$$

40. Caractérisation des applications constantes

40.1 ➙ *Soient I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$, une fonction dérivable sur I. Si*

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = 0_E,$$

alors f est constante sur I.

40.2 ➙ *Si $f : I \to E$ est continue sur l'intervalle I, dérivable sur son intérieur I° et si*

$$\forall\, t \in I^\circ, \quad f'(t) = 0_E$$

alors f est constante sur I.

41. Primitives

41.1 ✍ *Soit $f : I \to E$. Une application $F : I \to E$ est une* **primitive** *de f lorsque F est dérivable et que sa dérivée est f :*

$$F' = f.$$

41.2 ➙ *Soient I, un intervalle de $\mathbb{R}$; f, une application de I dans E ; F_1 et F_2, deux primitives de f sur I. Alors la différence $F_1 - F_2$ est constante sur I.*

II.4 Applications de classe $\mathscr{C}^k$

42. Pour tout entier $k \geqslant 1$, les classes $\mathscr{C}^k$ sont définies par récurrence.
Les propriétés des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ seront donc établies par récurrence à partir des propriétés des fonctions continues et des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

42.1 ✍ *Pour tout entier $k \geqslant 1$, une fonction*

$$f : I \to E$$

est **de classe $\mathscr{C}^k$ (sur I)** *lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I.*

42.2

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{C}^{k+1}(I,E) \subset \mathscr{C}^k(I,E)$$

42.3 Si $I = [a,b]$, alors l'application $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^p}$ définie par

$$\|f\|_{\mathscr{C}^p} = \sum_{k=0}^{p} \|f^{(k)}\|_\infty$$

est une norme sur $\mathscr{C}^p(I,E)$.

42.4 ✍ *Une fonction $f : I \to E$ est* **de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur I)**, *ou* **indéfiniment dérivable (sur I)**, *lorsque*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathscr{C}^k(I,E)$$

de telle sorte que

$$\mathscr{C}^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^k(I,E).$$

Opérations

43. Combinaisons linéaires

43.1 ➞ *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la classe $\mathscr{C}^k(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(I,E)$ et la dérivation*

$$D = [f \mapsto f']$$

est une application linéaire de $\mathscr{C}^{k+1}(I,E)$ dans $\mathscr{C}^k(I,E)$.

43.2 ➞ *La classe $\mathscr{C}^\infty(I,E)$ est un espace vectoriel stable par D.*

44. Produit

44.1 Triangle de Pascal

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}$$

44.2 ➞ **Formule de Leibniz**

Soient E et F, deux espaces de dimension finie. Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont de classe $\mathscr{C}^p$ et si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f,g) : I \to G$ est de classe $\mathscr{C}^p$ et

$$\big[B(f,g)\big]^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B\big(f^{(k)}(t), g^{(p-k)}(t)\big).$$

pour tout $t \in I$. →**[36]**

45. ➞ **Composition**

Si $f : J \to E$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ telles que $\varphi_*(I) \subset J$, alors $f \circ \varphi : I \to E$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^p$.

Difféomorphismes

46. On suppose ici que $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

46.1 Un ***difféomorphisme*** sert à *changer de variable* (dans une intégrale, dans une équation différentielle...) ou à *changer de paramètre* (dans un arc paramétré).

46.2 ✍ *Soient I et J, deux intervalles de $\mathbb{R}$.*
Une application $\varphi : I \to J$ est un **difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^p$** *lorsque*

1. *la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I*
2. *et réalise une bijection de I sur J*
3. *dont la réciproque $\varphi^{-1} : J \to I$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J.*

46.3 En pratique, quand une grandeur exprimée en fonction d'une certaine variable, il peut être utile de l'exprimer comme une fonction d'une nouvelle variable :

$$V = f(x) = g(u).$$

Dans ce cas, les variables u et x sont reliées par

$$u = \varphi(x) \quad \text{ou par} \quad x = \varphi^{-1}(u)$$

et les fonctions f et g qui représentent la grandeur V dans deux systèmes de coordonnées différents sont reliées par

$$f = g \circ \varphi \quad \text{ou par} \quad g = f \circ \varphi^{-1}.$$

46.4 ➞ **Théorème d'inversion, version $\mathscr{C}^1$**

Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi'(x) \neq 0,$$

alors φ réalise une bijection de l'intervalle I sur $J = \varphi_*(I)$ (qui est un intervalle) dont la réciproque $\varphi^{-1} : J \to I$ est dérivable sur I et

$$\forall\, y \in J, \quad (\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(y)\big)},$$

de telle sorte que φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

46.5 ➞ **Théorème d'inversion, version $\mathscr{C}^p$**

Une application φ de I, intervalle de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^p$ de I sur $J = \varphi_*(I)$ si, et seulement si, φ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Entraînement

47. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[29.1]** – La demi-tangente à droite au point d'abscisse t_0 est la demi-droite affine représentée paramétriquement par

$$\big(t_0, f(t_0)\big) + \mathbb{R}_+ \cdot \big(1, f'_d(t_0)\big).$$

2. On suppose que $f : I \to E$ est dérivable à gauche en $t_0 \in I$. On pose

$$M_0 = \big(t_0, f(t_0)\big) \in \mathbb{R} \times E \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_0 = \big(1, f'_g(t_0)\big) \in \mathbb{R} \times E.$$

La demi-tangente à gauche au point M_0 du graphe de f est-elle représentée par $M_0 + \mathbb{R}_+ \cdot \boldsymbol{v}_0$ ou par $M_0 + \mathbb{R}_- \cdot \boldsymbol{v}_0$?

3. *Suite de* **[30.3]** – Appliquer au cas où $E = \mathbb{C}$, considéré comme un espace vectoriel réel.
4. Si la fonction $[t \mapsto A_t]$ est dérivable de I dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors $[t \mapsto \det A_t]$ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.
5. On suppose que f est dérivable sur I et que t_0 est un point intérieur à I. Comparer $f'(t_0+)$ et $f'_d(t_0)$.
6. Étendre le théorème **[32]** aux fonctions f à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension quelconque à l'aide du développement limité

$$f(u) = f(u_0) + (u - u_0) f'(u_0) + o(u - u_0),$$

avec $u_0 = \varphi(t_0)$ et $u = \varphi(t) = u_0 + (t - t_0)\varphi'(t_0) + o(t - t_0)$.

7. Étendre la formule de Leibniz aux applications multilinéaires.
8. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} {}^1\!/_x$$

est dérivable, sa dérivée est identiquement nulle, mais f n'est pas constante.

9. *Suite de* **[43.1]** – Identifier le noyau et l'image de D.

10. Soient $\varphi : I \to J$, une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ et $\psi : J \to I$, sa bijection réciproque. Comparer les graphes de φ et de ψ, puis la tangente au graphe de φ au point d'abscisse $x_0 \in I$ avec la tangente au graphe de ψ au point d'abscisse $y_0 = \varphi(x_0)$.

48. On suppose que, pour tout $t \in I$, la famille

$$\mathscr{B}_t = \big(e_1(t), e_2(t)\big)$$

est une base de E et que les deux applications $e_1 : I \to E$ et $e_2 : I \to E$ sont dérivables. Si f et g sont deux applications dérivables de I dans E, alors

$$h = \big[t \mapsto \det_{\mathscr{B}_t}\big(f(t), g(t)\big)\big]$$

est dérivable. Expression de $h'(t)$?

III

Intégration

49. On étend ici la théorie de l'intégrale aux fonctions qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel vectoriel de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$ en reprenant les notations du **[25]**.

50. Fonctions continues par morceaux

50.1 ✍ *La fonction f est une* **fonction en escalier sur** *I lorsque toutes ses composantes $f^1, \dots, f^d$ sont des fonctions en escalier sur I.*

50.2 ➙ *Si $f : I \to E$ est une fonction en escalier, alors $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier.*

50.3 Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors il existe une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = b$ et une famille $(x_k)_{0 \leqslant k < N}$ de vecteurs de E tels que

$$\forall\, 0 \leqslant k < N,\ \forall\, t \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[\,, \quad f(t) = x_k.$$

50.4 ✍ *La fonction f est* **continue par morceaux sur** *I lorsque toutes ses composantes $f^1, \dots, f^d$ sont continues par morceaux sur I.*

50.5 ➙ *Si $f : I \to E$ est une fonction continue par morceaux, alors $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux.*

51. Fonctions intégrables

51.1 ✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **intégrable sur** *I lorsque toutes ses composantes f^k, $1 \leqslant k \leqslant d$, sont intégrables sur I.*

51.2 On suppose que la fonction $f : I \to E$ est continue par morceaux sur I. La fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $\|f\| : I \to \mathbb{R}_+$ est intégrable sur I.

51.3 ✍ *Si $f : I \to E$ est intégrable sur I, son intégrale est définie par*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{d}\Big(\int_I f^k(t)\,\mathrm{d}t\Big)e_k.$$

51.4 Si $I =]a, b[$ et si $f : I \to E$ est intégrable, alors

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a\\ y \to b}} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ sur E.

52. Cohérence des définitions

Soit $f : I \to E$.

1. Certaines propriétés des composantes de f dépendent de la base de E choisie pour calculer ces composantes, d'autres propriétés ne dépendent pas de ce choix.

1.a Soit $f(t) = (e^t, 1 + t^2) \in \mathbb{R}^2$. Les composantes de f dans la base canonique (e_1, e_2) sont positives. Les composantes de f dans la base $(-e_2, -e_1)$ ne sont pas positives.

1.b Un problème analogue se pose pour définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$. Préciser ce problème et sa résolution.

2. Pour qu'une propriété des composantes de f soit une propriété de f, il faut que cette propriété soit indépendante du choix de la base.

2.a Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, une base de E. On pose

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \varphi^k = \varepsilon_k^* \circ f.$$

Relier les composantes φ^k, $1 \leqslant k \leqslant d$, de f dans la base $\mathscr{C}$ aux composantes f^k, $1 \leqslant k \leqslant d$, de f dans la base $\mathscr{B}$.

2.b Les définitions **[50.1]**, **[50.4]**, **[51]** et **[51.3]** ont bien un sens.

53. ➙ **Densité pour la convergence en moyenne**
Si f est une fonction intégrable sur I, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I telles que

$$\int_I \big\|f(t) - f_n(t)\big\|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

54. Densité pour la convergence uniforme

Soit $I = [a, b]$.

54.1 La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f pour la norme $\|\cdot\|$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} \big\|\varphi_n(t) - f(t)\big\| = 0$$

si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, la suite des composantes $(\varphi_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la composante f^k :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in I} \big|\varphi_n^k(t) - f^k(t)\big| = 0.$$

54.2 Si la fonction $f : I \to E$ est continue par morceaux, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur I qui converge uniformément sur I vers f. →**[8.49]**

54.3 Si la fonction $f : I \to E$ est continue, alors il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et affines par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers f. →**[8.135.6]**

55. Linéarité

55.1 Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est intégrable sur I et

$$\int_I (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t,$$

quelles que soient les fonctions f et g intégrables sur I.

55.2 Relation de Chasles

Si $f : I \to E$ est intégrable sur I, alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

quels que soient les réels a, b et c dans I.

55.3 Si I est un voisinage de $+\infty$ **[18.13.4]** et si $f : I \to E$ est intégrable sur I, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

quels que soient a et b dans I.

55.4 ➙ *Soit $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une fonction intégrable. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $AX : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est intégrable et*

$$\int_I AX_t\,\mathrm{d}t = A\Big(\int_I X_t\,\mathrm{d}t\Big).$$

55.5 ➙ *Soit $A : I \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une fonction intégrable. Quelles que soient les matrices $Q \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la fonction $QAP : I \to \mathfrak{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ est intégrable et*

$$\int_I QA_tP\,\mathrm{d}t = Q\Big(\int_I A_t\,\mathrm{d}t\Big)P.$$

55.6 ➞ *Si $f : I \to E$ est intégrable et si $\varphi : E \to F$ est linéaire, alors $\varphi \circ f : I \to F$ est intégrable et*

$$\int_I (\varphi \circ f)(t)\,\mathrm{d}t = \varphi\Big(\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

56. Positivité
L'espace vectoriel E n'est pas muni naturellement d'une relation d'ordre, à moins que $E = \mathbb{R}$. La conservation des inégalités par intégration n'a donc pas de sens pour des fonctions à valeurs vectorielles et seule subsiste l'***inégalité triangulaire***, établie par densité à partir du cas des fonctions en escalier sur un segment.
56.1 ➞ *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux qui converge uniformément sur $[A, B]$ vers la fonction continue par morceaux f, alors*

$$\Big\| \int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t - \int_A^B f_n(t)\,\mathrm{d}t \Big\| \leqslant (B-A)\|f - f_n\|_\infty$$

et

$$\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_A^B f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

56.2 ➞ *Si $f : I \to E$ est intégrable sur I, alors*

$$\Big\| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \Big\| \leqslant \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Primitives

57. Théorème fondamental
57.1 ➞ *Si la fonction $f : I \to E$ est continue, alors l'application*

$$F_{x_0} = \Big[x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

est une primitive de f pour tout $x_0 \in I$.
57.2 Si la fonction $f : I \to E$ est continue et intégrable sur l'intervalle $I =]a, b[$, alors

$$F_a = \Big[x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big] \quad \text{et} \quad F_b = \Big[x \mapsto -\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

sont des primitives de f.

58. Intégration par parties
58.1 ➞ *On suppose que E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie.*
Soient $f : I \to E$ et $g : I \to F$, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $B : E \times F \to G$, une application bilinéaire **[12.3]**. *Alors*

$$\int_a^b B\big(f'(t), g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \big[B\big(f(t), g(t)\big)\big]_a^b - \int_a^b B\big(f(t), g'(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

quels que soient a et b dans I.
58.2 Si $A : I \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, alors

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} B_t\,\mathrm{d}t = \big[A_t B_t\big]_a^b - \int_a^b A_t \frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

quels que soient a et b dans I.

Intégrales fonctions d'un paramètre

59. Le théorème de convergence dominée s'étend sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.
59.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée sur I si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la convergence de la suite $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ des composantes est dominée sur I.

59.2 ➞ **Théorème de convergence dominée**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux de I dans un espace vectoriel de dimension finie E.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big\|f_n(t)\big\|_E \leqslant g(t),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \big\|f(t) - f_n(t)\big\|_E\,\mathrm{d}t = 0$$

et en particulier

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

60. On peut en déduire une condition suffisante pour qu'une intégrale varie continûment en fonction d'un paramètre et, lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dispose d'une condition suffisante pour que cette intégrale soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

61. ➞ *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x, t) \in \Omega \times I$ et on suppose que :*
61.1 Hypothèse de régularité
Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x, t)\big]$ est continue sur Ω ;
61.2 Hypothèse d'intégrabilité
Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\big[t \mapsto f(x, t)\big]$ est intégrable sur I ;
61.3 Hypothèse de domination
Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, x \in V, \quad \big\|f(x, t)\big\|_E \leqslant g(t).$$

61.4 Conclusion
Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur Ω.

62. ➞ *Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, une fonction définie pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$. On suppose que :*
62.1 Hypothèse de régularité
Pour tout $t \in I$, la fonction $\big[x \mapsto f(x, t)\big]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;
62.2 Hypothèse d'intégrabilité
Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions

$$\big[t \mapsto f(x, t)\big] \quad \text{et} \quad \Big[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\Big]$$

sont intégrables sur I ;
62.3 Hypothèse de domination
Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I tels que

$$\forall\, x \in V,\ \forall\, t \in I, \quad \Big\|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\Big\|_E \leqslant g(t).$$

62.4 Conclusion
Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

Entraînement

63. Questions pour réfléchir

1. Les réciproques de **[50.2]** et de **[50.5]** sont fausses.
2. Toute fonction en escalier $f : [a,b] \to E$ est intégrable sur $[a,b]$. Pour toute subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = b$$

telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot x_k$$

où x_k est la valeur prise par f sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$. →**[52]**

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'établir l'inégalité de la moyenne **[56.2]** en raisonnant sur les composantes de f ?
4. Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Condition suffisante pour que la fonction

$$\left[u \mapsto \int_I f(u,t)\,\mathrm{d}t\right]$$

soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

IV

Séries de fonctions

64. On considère une série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur une partie Ω de E, espace vectoriel de dimension finie, et prennent leurs valeurs dans F, espace vectoriel de dimension finie.

IV.1 Modes de convergence

65. Convergence simple, convergence absolue

65.1 ✍ *La série de fonctions $\sum f_n$* **converge simplement** *sur Ω lorsque, pour tout $x \in \Omega$, la série $\sum f_n(x)$ converge dans F.*

65.2 Lorsque la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur Ω, on note S, la ***somme*** de cette série (définie sur Ω) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n, le ***reste*** d'ordre n.

65.3 ✍ *La série de fonctions $\sum f_n$* **converge absolument** *sur Ω lorsque, pour tout $x \in \Omega$, la série de terme général positif $\sum \|f_n(x)\|_F$ est convergente.*

65.4 ➙ *Si une série $\sum f_n$ de fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie converge absolument sur Ω, alors elle converge simplement sur Ω.*

66. Convergence uniforme

La norme de la convergence uniforme sur Ω est définie en fonction de la norme choisie sur F.

66.1 ✍ *Pour toute fonction bornée $g : \Omega \to F$, on pose*

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \|g(x)\|_F.$$

66.2 ✍ *On considère une série de fonctions $\sum f_n$ qui converge simplement sur Ω.*

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur Ω lorsque la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge uniformément sur Ω vers la fonction nulle.

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \quad \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

67. Convergence normale

67.1 ✍ *La série de fonctions bornées $\sum f_n$* **converge normalement** *sur Ω lorsque la série de terme général positif $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.*

67.2 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions bornées de Ω dans F. La série $\sum f_n$ converge normalement sur Ω si, et seulement si, la série de vecteurs $\sum f_n$ converge absolument dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathscr{B}(\Omega, F), \|\cdot\|_\infty\big)$.

67.3 ➙ *Si une série de fonctions bornées converge normalement sur Ω, alors elle converge uniformément et absolument sur Ω.*

67.4 ➙ *La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur Ω si, et seulement si, il existe une série convergente $\sum \alpha_n$ telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad \|f_n(x)\|_F \leqslant \alpha_n.$$

IV.2 Continuité de la somme

68. ➙ *Soit $\sum f_n$, une série de fonctions continues de Ω dans F. S'il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_\Omega(x_0)$ sur lequel la série converge uniformément, alors sa somme est continue au point x_0.*

69. On peut généraliser le théorème précédent en étudiant le comportement de la somme au bord de son ensemble de définition (soit au voisinage d'un point adhérent à Ω) ou au voisinage de l'infini (seulement si Ω est un voisinage de l'infini).

70. ➙ Théorème d'interversion des limites [8.30]

Soient $(F, \|\cdot\|_F)$, un espace de dimension finie et x_0, un point adhérent à une partie Ω de E ou un point à l'infini.

70.1 Hypothèses

On suppose que :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \Omega \to F$ admet une limite $\ell_n \in F$ au voisinage de x_0 ;*
2. *Il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_\Omega(x_0)$ tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur V vers une fonction f.*

70.2 Conclusion

Alors f admet une limite $\ell \in F$ au voisinage de x_0 et

$$\ell = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n.$$

71. ➙ Passage à la limite terme à terme

Soit $\sum f_n$, une série de fonctions définies sur $\Omega \subset E$, à valeurs dans un espace F de dimension finie.

71.1 Hypothèses

On suppose que :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ au voisinage de x_0 ;*
2. *Il existe un voisinage V relatif à Ω de x_0 sur lequel la série de fonctions $\sum f$ converge uniformément.*

71.2 Conclusion

Alors la somme de la série admet une limite dans F au voisinage de x_0 et cette limite peut être calculée terme à terme :

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

72. Exemple

La fonction définie par

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}$$

est continue de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$. Elle tend vers $+\infty$ au voisinage de $(0,0)$.

IV.3 Théorèmes d'intégration terme à terme

73. ➙ Version uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues du segment $I = [a,b]$ dans un espace vectoriel de dimension finie F.

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors sa somme S est continue sur $[a,b]$, la série $\sum \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

74. ➙ Version lebesguienne

Soit $\sum f_n$, une série de fonctions d'un intervalle I dans un espace vectoriel de dimension finie F qui converge simplement sur I.

On suppose que :

74.1 Hypothèse d'intégrabilité

Les fonctions f_n sont intégrables sur I ;

74.2 Hypothèse de régularité

La somme S de la série $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I ;

74.3 Hypothèse de domination
La série de terme général positif

$$\sum \int_I \|f_n(t)\|_F \, dt$$

est convergente.
74.4 Conclusion
Alors la somme S est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n(t)\, dt$ est convergente et

$$\int_I S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt.$$

IV.4 Dérivation terme à terme

75. ➙ *On suppose que Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $\sum f_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement sur Ω. Si la série des fonctions dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur $I \subset \Omega$, alors la somme S de la série de fonctions $\sum f_n$ est dérivable sur I et*

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

76. * *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur Ω et si les séries des dérivées partielles*

$$\sum \frac{\partial f_n}{\partial x} \quad et \quad \sum \frac{\partial f_n}{\partial y}$$

convergent uniformément sur un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$, alors la somme S de la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω_0 et

$$\frac{\partial S}{\partial x}(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x}(M), \quad \frac{\partial S}{\partial y}(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial y}(M)$$

pour tout $M \in \Omega_0$.

77. La fonction F définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus [y=0]$ par

$$F(x,y) = e^{-2y} \frac{\operatorname{sh}(xy)}{y}$$

admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$ dont les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Entraînement

78. Questions pour réfléchir

1. Les normes uniformes sur $\mathscr{B}(\Omega, F)$ associées à différentes normes sur F sont équivalentes.
2. On choisit une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_d)$ de F et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n^1, f_n^2, \dots, f_n^d$, les composantes de la fonction f_n relatives à la base $\mathscr{B}$.

$$\forall\, x \in \Omega, \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{d} f_n^k(x) \cdot u_k.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément; resp. normalement) sur Ω si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la série de fonctions $\sum f_n^k$ converge simplement (resp. uniformément; resp. normalement) sur Ω.

3. Condition suffisante pour que la somme d'une série de fonctions soit continue sur Ω.
4. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ au voisinage de l'infini et qu'il existe un voisinage V de l'infini dans Ω sur lequel la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément. Alors la série $\sum \ell_n$ converge dans F et

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

79. Soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction S définie par

$$S(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U = [x^2+y^2 < R^2]$. Comparer les dérivées partielles

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(x,y)$$

sur U.

80. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad u_n(t) = \frac{e^{-nt}}{n^2}.$$

La fonction S définie par

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad S(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x^2+y^2)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

81. On étudie la fonction f définie sur l'ouvert $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$f(M) = M^{-1}.$$

81.1 Lorsque la matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est proche de la matrice nulle, la matrice $I_n + H$ est inversible et

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - H + o(H).$$

81.2 La fonction f est différentiable et

$$\forall\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{d}f(M)(H) = M^{-1} H M^{-1}.$$

81.3 La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, car ses composantes sont des fonctions rationnelles des coordonnées.

V

Algèbres de dimension finie

82. On considère une algèbre E de dimension finie, munie d'une ***norme d'algèbre*** $\|\cdot\|$, c'est-à-dire d'une norme sous-multiplicative telle que $\|1_E\| = 1$.

83. ➙ *Toute application polynomiale de E dans E :*

$$\Big[u \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big]$$

est continue.

V.1 Série géométrique

84. L'application

$$F = \big[u \mapsto (1_E - u)^{-1}\big]$$

est continue sur la boule unité ouverte $[\|u\| < 1]$.

85. Pour tout $u \in E$, l'application

$$F_u = \big[t \mapsto (1_E - tu)^{-1}\big]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $\left]-1/\|u\|, 1/\|u\|\right[$ et

$$F_u'(t) = u(1_E - t \cdot u)^{-2} = (1_E - t \cdot u)^{-2} u.$$

V.2 Série exponentielle

86. ➙ *L'application*

$$\exp = \left[u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n\right]$$

est continue sur E.

87. ➙ *Soit $u \in E$.*

1. *Quels que soient les réels s et t,*

$$\exp(su)\exp(tu) = \exp\big[(s+t)u\big] = \exp(tu)\exp(su).$$

2. *L'application $[t \mapsto \exp(tu)]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\frac{\mathrm{d}\exp(tu)}{\mathrm{d}t} = u\exp(tu) = \exp(tu)u.$$

88. ➙ *Soient $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$. La fonction X définie par*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)X_0$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t).$$

89. Exponentielle et morphismes d'algèbre [82]

89.1 ➙ *Soit φ, un endomorphisme d'algèbre de E. Alors*

$$\exp\big(\varphi(u)\big) = \varphi\big(\exp(u)\big)$$

pour tout $u \in E$.

89.2 ➙ $\forall\, A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad {}^t(\exp A) = \exp({}^tA).$

89.3 ➙ $\forall\, A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \quad \overline{\exp A} = \exp \overline{A}.$

89.4 ➙ *Soit $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$. Alors*

$$P^{-1}\exp(A)P = \exp(P^{-1}AP)$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$.

90. Exponentielle d'un endomorphisme [3.103]

Soit u, un endomorphisme diagonalisable de V, espace vectoriel de dimension finie.

90.1 Il existe une base de V constituée de vecteurs propres communs à u et à $\exp(u)$.

90.2 Si $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}$ est la famille des projecteurs spectraux associés à u, alors →[9.147]

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tu) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} e^{\lambda t} p_\lambda.$$

91. Exponentielle d'une matrice

Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$.

91.1 La matrice $\exp(A)$ est un polynôme en A. →[96]

91.2 Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, alors

$$\exp(A) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d}).$$

91.3 Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}\exp(A)P$ soient diagonales.

91.4 Si A est semblable à une matrice triangulaire T, alors $\exp(A)$ est semblable à $\exp(T)$.

91.5

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det\big[\exp(A)\big] = \exp(\mathrm{tr}\, A).$$

Entraînement

92. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [82] – Pour toute norme N sur E,

$$\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, (x,y) \in E \times E, \quad N(xy) \leqslant \alpha N(x)N(y).$$

2. *Suite de* [84] – Quelle que soit la norme sur E, la fonction F est continue sur un voisinage de 0_E.

3. *Suite de* [85] – Quelle que soit la norme sur E, la fonction F_u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de 0.

4.a Si la matrice A est symétrique, alors $\exp(A)$ est symétrique.

4.b Si la matrice $\exp(A)$ est symétrique, la matrice A est-elle symétrique ?

5. Si A est une matrice antisymétrique réelle, alors $\exp(A)$ est une matrice de rotation.

6. Comparer les spectres et les sous-espaces propres de A et de $\exp(A)$ en supposant que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

93. Si $u \in \mathrm{L}(V)$ admet $(X-a)(X-b)$ pour polynôme minimal (où a et b sont deux scalaires distincts), alors

$$\exp(u) = \frac{e^a - e^b}{a-b}\, u + \frac{be^a - ae^b}{b-a}\, \mathrm{I}_E\,.$$

94. Système différentiel à coefficients non constants

On étudie un système différentiel de la forme

$$X_t' = B(t)X_t$$

où la fonction $[t \mapsto B(t)]$ est continue de I dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

94.1 Soit $[t \mapsto A(t)]$, une application de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application

$$f = [t \mapsto \exp A(t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si de plus

$$(\star) \qquad \forall\, t \in I, \quad A(t)A'(t) = A'(t)A(t),$$

alors

$$f'(t) = [\exp A(t)]A'(t) = A'(t)\exp A(t)$$

pour tout $t \in I$.

94.2 Analyse de la condition nécessaire

On cherche maintenant des conditions simples pour que la condition $(\star)$ soit vérifiée.

1. S'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $D(t) = P^{-1}A(t)P$ soit diagonale pour tout $t \in I$, alors la condition $(\star)$ est vérifiée.

2. Il suffit aussi que

$$\forall\, (s,t) \in I \times I, \quad A(s)A(t) = A(t)A(s)$$

pour que $(\star)$ soit vérifiée.

3. La condition

$$\forall\, (s,t) \in I \times I, \quad A'(s)A'(t) = A'(t)A'(s)$$

est vérifiée dès que la dérivée A' est constante (cas d'un système différentiel à coefficients constants). Cette condition suffit-elle pour que $(\star)$ soit vérifiée ?

95. Caractérisation des sous-espaces stables

Soit $u \in \mathrm{L}(V)$, où V est un espace de dimension finie.

1. Tout sous-espace propre de u est contenu dans un sous-espace propre de $\exp(u)$.

2. Un sous-espace vectoriel V_0 est stable par u si, et seulement si, il est stable par $\exp(tu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

96. On suppose que le degré du polynôme minimal de A est égal à p.

1. Il existe des fonctions $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p-1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k(t) A^k.$$

2. Les fonctions ε_k sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifient un système différentiel linéaire du premier ordre représenté par la matrice compagnon [**9.163**] associée au polynôme minimal de A.

3. Les fonctions ε_k sont-elles polynomiales ?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

97. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de fonction continue qui n'est pas dérivable.
2. Exemple de fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ sans être dérivable au point 0, dont la dérivée admet une limite finie au voisinage de 0.
3. Exemples de sous-algèbres de dimension finie de E pour $E = \mathbb{K}[X]$; pour $E = \mathrm{L}(V)$.
4. Exemples de normes sur l'algèbre E qui sont (resp. ne sont pas) des normes d'algèbre

4.a pour $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$;

4.b pour $E = \mathrm{L}(V)$ avec V, espace vectoriel de dimension finie.

98. Méthodes

1. Comment caractériser les applications constantes à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sans utiliser le théorème [**40.1**] ?
2. Une fonction f est ***fonction affine*** de $\mathbb{R}$ dans E lorsqu'il existe deux vecteurs a et b de E tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = t \cdot a + b.$$

Comment caractériser les fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans E ?

3. Comment calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable ?

99. Questions pour réfléchir

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de E qui converge vers $\ell \in E$. L'adhérence de $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, égale à $A \cup \{\ell\}$, est une partie compacte de E. Cette propriété est-elle encore vraie si E est un espace de dimension infinie ?
2. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée admet des limites finies à gauche et à droite en 0. Comparer $f'(0)$, $f'_g(0)$, $f'_d(0)$, $f'(0+)$ et $f'(0-)$.
3. On suppose que $f : \left]a,b\right[\to E$ est dérivable. Est-il possible de prolonger f en une fonction dérivable sur $[a,b]$?
4. Étendre la formule de Leibniz aux applications multilinéaires continues à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension quelconque.
5. Généraliser [**37**] pour le calcul de la dérivée p-ième.
6. Généraliser [**48**] à un espace E de dimension $d \geqslant 3$. →[**37**]

100. Banque CCP

Exercices 40, 41.

Pour aller plus loin

101. Questions pour réfléchir

1. Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie.

1.a Comment définir une norme sur $\mathscr{C}^1([0,+\infty[\,, E)$?

1.b Comment définir une norme sur $\mathscr{C}^\infty([a,b], E)$ qui en fasse un espace complet ?

2. Soit E, une algèbre de dimension finie. Existe-t-il une norme d'algèbre sur E ?

102. Une propriété de connexité

Les seules parties d'un intervalle I qui soient à la fois des fermés et des ouverts relatifs à I sont égaux à I. →[**18.86**]

102.1 Soient $A = [a,b]$, un segment et X, une partie fermée de A qui contient a. L'ensemble $A_X = \{x \in [a,b] \;:\; [a,x] \subset X\}$ a un plus grand élément M_X.

102.2 Si X est une partie fermée de $[a,b]$ qui contient a et telle que

$$\forall\, x_0 \in X,\ \exists\, \alpha > 0, \quad [x_0, x_0+\alpha[\, \cap [a,b] \subset X,$$

alors $X = [a,b]$.

103. Inégalité des accroissements finis [102]

Soit $f : [A,B] \to E$, une application continue.

103.1 Si f est lipschitzienne sur $]A,B[$, alors f est lipschitzienne sur $[A,B]$.

103.2 Si f est dérivable sur $[a,b]$ et si

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, t \in [a,b], \quad \|f'(t)\|_E \leqslant K$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\{t \in [a,b] \;:\; \|f(t) - f(a)\|_E \leqslant (K+\varepsilon)(t-a)\} = [a,b].$$

103.3➟ *Soit $f : I \to E$, une fonction continue sur l'intervalle I et dérivable sur l'intérieur I° de cet intervalle. S'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que*

$$\forall\, t \in I^\circ, \quad \|f'(t)\|_E \leqslant K,$$

alors f est K-lipschitzienne sur I.

103.4 à quoi sert l'hypothèse sur la dimension de E dans la démonstration de [**103**] ?

104. Espaces homéomorphes

Un ***homéomorphisme*** de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$ est une bijection $f : E \to F$ telle que les deux applications

$$f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F) \quad \text{et} \quad f^{-1} : (F, \|\cdot\|_F) \to (E, \|\cdot\|_E)$$

sont continues.

Les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont dits ***homéomorphes*** lorsqu'il existe un homéomorphisme de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$.

1. Si f est un homéomorphisme de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$, alors l'image par f d'une partie ouverte (resp. fermée, resp. compacte) de E est une partie ouverte (resp. fermée, resp. compacte) de F. Que dire de l'image par f d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E ?
2. Deux espaces vectoriels normés de même dimension d sont homéomorphes.
3. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet et si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont homéomorphes, l'espace $(F, \|\cdot\|_F)$ est-il complet ?

105. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que le spectre de A est contenu dans $\mathbb{R}_-^*$. Que dire du spectre de $\exp(tA)$? Que peut-on en déduire de $\exp(tA)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
2. Condition nécessaire et suffisante pour que

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|\exp(tA)\| \leqslant M.$$