Intégrales

Démontrer la convergence de

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ell n\, t}\, dt.$$

Vérifier que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

En déduire la valeur de I.

⋆

❧ La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{t-1}{\ell n\, t} \right]$$

est évidemment continue sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Lorsque t tend vers 0,

$$f(t) \sim \frac{-1}{\ell n\, t} \longrightarrow 0.$$

Lorsque t tend vers 1,

$$f(t) = \frac{(t-1)}{\ell n[1-(1-t)]} \sim \frac{(t-1)}{-(t-1)} \longrightarrow -1.$$

La fonction f admet donc un prolongement continu sur le segment $[0, 1]$ (en posant $f(0) = 0$ et $f(1) = -1$), donc elle est intégrable sur $]0, 1[$.

REMARQUE.— Seul le prolongement de f est intégrable sur le segment $[0, 1]$, car f elle-même *n'est pas définie* sur le segment $[0, 1]$, mais seulement sur l'ouvert $]0, 1[$.

❧ La fonction $\varphi = [x \mapsto t = e^{-x}]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $]0, 1[$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme $f(t)$ est intégrable sur $]0, 1[$, le Théorème du changement de variable nous assure que

$$f \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = \frac{e^{-x} - 1}{\ell n(e^{-x})} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$I = \int_{+\infty}^0 f \circ \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$$

❧ Puisque la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \right]$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$, on sait que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$$

Comme les deux fonctions

$$\left[x \mapsto \frac{e^{-x}}{x} \right] \qquad \text{et} \qquad \left[x \mapsto \frac{e^{-2x}}{x} \right]$$

sont intégrables sur $[\varepsilon, +\infty[$ (continues sur cet intervalle et $\mathcal{o}(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$), on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x}\, dx.$$

Le changement de variable AFFINE $y = 2x$ dans la dernière intégrale nous donne :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

❧ Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$,

$$\frac{e^{-2\varepsilon}}{x} \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{e^{-\varepsilon}}{x}.$$

En intégrant sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, on en déduit que

$$e^{-2\varepsilon} \ln 2 \leqslant \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \leqslant e^{-\varepsilon} \ln 2$$

et, par encadrement, que $I = \ln 2$.

Variante 1. La fonction $[x \mapsto (e^{-x} - 1)/x]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et tend vers -1 au voisinage de 0, donc elle est intégrable au voisinage de 0. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x} - 1}{x}\,dx = \int_{0}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x} - 1}{x}\,dx - \int_{0}^{\varepsilon} \frac{e^{-x} - 1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 - 0 = 0.$$

Par conséquent, en vertu de l'Astuce taupinale,

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x} - 1}{x}\,dx = \ln 2 + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x} - 1}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln 2 + 0.$$

(**On prendra soin de ne jamais invoquer la linéarité pour des intégrales divergentes !**)

Variante 2. La fonction $g = [x \mapsto e^{-x}/x]$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $g(x) \sim {}^1\!/_x$ au voisinage de 0. Comme la fonction $[x \mapsto {}^1\!/_x]$ est continue et positive mais pas intégrable au voisinage de 0, on en déduit que

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon$$

(Théorème d'intégration des ordres de grandeurs, version divergente).

Mais cela nous conduit à

$$\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \big[\ln 2\varepsilon - \ln \varepsilon + o(\ln \varepsilon)\big] = o(\ln \varepsilon),$$

ce qui ne nous permet pas de conclure !