Réduction des endomorphismes [83.]

❧ On rappelle qu'une fonction

$$f : X \to \mathbb{K}$$

est dite **polynomiale** lorsqu'il existe *au moins un* polynôme

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$$

tel que

$$\forall\, x \in X \subset \mathbb{K}, \quad f(x) = P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Le principal problème sur les fonctions polynomiales est de savoir s'il y a, ou non, unicité du polynôme P. Ce problème est résolu par le **Théorème d'identification des fonctions polynomiales** :
S'il existe un polynôme P_0 *de degré* n *tel que*

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) = P_0(x)$$

et si $\#(X) > n$, *alors* P_0 *est l'unique polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) = P(x).$$

En particulier, si X est une partie *infinie* de $\mathbb{K}$, alors l'application

$$P \longmapsto f = [x \mapsto P(x)]$$

est une application injective de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{A}(X, \mathbb{K})$.

❧ Si le polynôme caractéristique χ_A de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est égal à

$$a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

et si la matrice A est inversible, alors

$$a_0 = (-1)^n \det A \neq 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\det(tI_n - A^{-1}) &= \det[(tA - I_n)A^{-1}] \\ &= \det(tA - I_n)\det(A^{-1})\end{aligned}$$

et pour tout $t \in X = \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned}\det(tI_n - A^{-1}) &= \frac{(-t)^n}{\det A} \cdot \det\Big(\frac{1}{t}I_n - A\Big) \\ &= \frac{t^n}{a_0} \cdot \chi_A\Big(\frac{1}{t}\Big) \\ &= \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}.\end{aligned}$$

Par définition, le polynôme caractéristique de A^{-1} est le polynôme associé à la fonction

$$\left[t \mapsto \det(tI_n - A^{-1})\right]$$

donc

$$\forall\, t \in X, \quad \chi_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}.$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$, l'ensemble $X = \mathbb{K}^*$ est une partie *infinie*, ce qui permet d'appliquer le Théorème d'identification des fonctions polynomiales rappelé plus haut. On en déduit que

$$\chi_{A^{-1}} = X^n + \frac{a_1}{a_0}X^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}X + \frac{a_n}{a_0}$$

(qui est bien un polynôme unitaire de degré n) et en particulier que le polynôme caractéristique $\chi_{A^{-1}}$ est associé au polynôme

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n.$$

❧ Pour bien comprendre le problème résolu par le Théorème d'identification, on peut revoir la théorie de l'interpolation de Lagrange : en restriction à un ensemble fini de cardinal $n+1$, *toute* fonction est en fait une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n. (Ainsi, toute fonction définie en un seul point est constante !)

❧ On peut aussi se pencher sur le cas des corps finis : sur $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la fonction polynomiale

$$f = \left[x \mapsto x^2 - x\right]$$

est identiquement nulle, alors que les polynômes

$$0 \quad \text{et} \quad X^2 - X \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$$

sont distincts (ils n'ont pas le même degré).