Comme $u$ est nilpotent d'indice $d$, alors $u^d = \omega$ et $u^{d-1} \neq \omega$.

Comme $u^{d-1}$ n'est pas l'endomorphisme identiquement nul, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{d-1}(x) \neq 0_E$. Un tel vecteur $x$ est fixé pour toute la suite et nous allons démontrer que, *quel que soit ce vecteur* $x$, la famille

$$\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\big)$$

est libre.

PAR RÉCURRENCE.— On considère une relation de liaison

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E. \tag{$\star$}$$

Par définition de $d$, on a $u^d(x) = 0_E$ et par conséquent, $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geqslant d$. On applique l'endomorphisme $u^{d-1}$ : par linéarité,

$$\alpha_0 \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Comme $u^{d-1}(x) \neq 0_E$, on en déduit que $\alpha_0 = 0$.

**Hypothèse de récurrence** :

On suppose qu'il existe un entier $0 \leqslant k < d-1$ tel que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la relation $(\star)$ devient

$$\alpha_{k+1} \cdot u^{k+1}(x) + \alpha_{k+2} \cdot u^{k+2}(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Comme $k < d-1$ et que $k$ et $d$ sont des entiers, alors $k \leqslant d-2$, donc $d-k-2 \in \mathbb{N}$. On applique alors l'endomorphisme $u^{d-k-2}$ : il ne reste plus que

$$\alpha_{k+1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E$$

puisque $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geqslant d$. Or $u^{d-1}(x) \neq 0_E$, donc $\alpha_{k+1} = 0$.

On a ainsi démontré que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

pour tout entier $0 \leqslant k < d-1$. En particulier pour $k = d-2$, on a démontré que

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{d-1} = 0,$$

ce qui prouve que la famille

$$\big(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\big)$$

est libre.

VARIANTE.— Il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence : on peut aussi raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une relation de liaison

$$\alpha_0 \cdot x + \alpha_1 \cdot u(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E \tag{$\star$}$$

où les scalaires $\alpha_0$, $\alpha_1$, ..., $\alpha_{d-1}$ ne sont pas tous nuls. On peut alors poser

$$m = \min\{0 \leqslant k < d \ : \ \alpha_k \neq 0\}$$

puisqu'une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

La relation de liaison ($\star$) peut donc être écrite sous la forme

$$\alpha_m \cdot u^m(x) + \cdots + \alpha_{d-1} \cdot u^{d-1}(x) = 0_E \tag{$\star\star$}$$

où le scalaire $\alpha_m$ n'est pas nul (par définition de l'indice $m$).

Comme l'entier $m$ est *strictement* inférieur à l'entier $d$, alors l'entier $d - m - 1$ est positif, donc $u^{d-m-1}$ existe bien.

Appliquons l'endomorphisme $u^{d-m-1}$ à la relation de liaison ($\star\star$). On obtient alors

$$\alpha_m \cdot u^{d-1}(x) + \sum_{k=m+1}^{d-1} \alpha_k \cdot u^{d-m-1+k}(x) = 0_E$$

et comme $d - m - 1 + k \geqslant d - (m+1) + (m+1) = d$ pour tout $m + 1 \leqslant k < d$, il ne subsiste que

$$\alpha_m \cdot u^{d-1}(x) = 0_E.$$

Mais $u^{d-1}(x) \neq 0_E$ (par définition de $x$) et $\alpha_m = 0$ (par définition de $m$) : c'est absurde.

Par conséquent, l'hypothèse que les $d$ scalaires $\alpha_0$, ..., $\alpha_{d-1}$ ne soient pas tous nuls est fausse : le résultat est démontré.