
Intégrales [49.6, 48.4]

49.6. La fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par

$$f(u) = \frac{\ln u}{1 + u^2}$$

est une fonction continue sur I . Elle est intégrable au voisinage de 0 , puisque $f(u) \sim \ln u$. Elle est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque

$$f(u) = \underbrace{\frac{\ln u}{\sqrt{u}}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{u}}{1 + u^2}}_{\sim 1/u\sqrt{u}} = o\left(\frac{1}{u\sqrt{u}}\right).$$

Le changement de variable φ défini par

$$\forall t \in I, \quad u = \varphi(t) = \frac{1}{t}$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de I sur I .

Comme f est intégrable sur I , alors

$$(f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) = \frac{\ln(1/t)}{1 + (1/t)^2} \cdot \frac{-1}{t^2} = \frac{\ln t}{1 + t^2} = f(t)$$

est intégrable sur I (ce qui ne nous apprend rien !) et

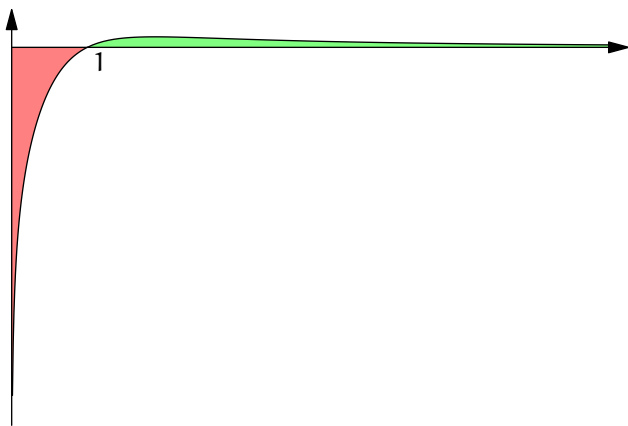
$$\int_0^{+\infty} (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{+\infty}^0 f(u) du.$$

Autrement dit,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} f(u) du$$

et par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1 + u^2} du = 0.$$



L'aire verte et l'aire rouge se compensent exactement !

48.4. On considère maintenant la fonction continue g définie par

$$\forall u \in]0, +\infty[, \quad g(u) = \frac{\ln u}{a^2 + u^2}$$

et le changement de variable *affine* ψ défini par

$$\forall x \in I, \quad u = \psi(t) = at,$$

qui réalise une bijection de I sur I .

La fonction (de t) définie par

$$(g \circ \psi)(t) \cdot \psi'(t) = a \frac{\ln(at)}{a^2 + (at)^2} = \frac{1}{a} \frac{(\ln t + \ln a)}{1 + t^2} = \frac{f(t)}{a} + \frac{\ln a}{a} \frac{1}{1 + t^2}$$

est intégrable sur I en tant que somme de deux fonctions intégrables. D'après le théorème de changement de variable, la fonction g est elle aussi intégrable sur I et, comme les deux termes de cette somme sont intégrables, on peut invoquer la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(u) \, du &= \int_0^{+\infty} (g \circ \psi)(t) \cdot \psi'(t) \, dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(t) \, dt + \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} \, dt = [\text{Arctan } t]_0^x = \text{Arctan } x$$

(puisque $\text{Arctan } 0 = 0$) et, en faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \, dt = \frac{\pi}{2}$$

et on obtient enfin que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} \, dt = \frac{\pi}{2} \frac{\ln a}{a}.$$

Voici comment on peut créer (à peu près) la figure qui illustre le calcul.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# En général, les coloristes donnent les 3 composantes RVB
# en nombres entiers (entre 0 et 255) là où Python attend
# un triplet de réels compris entre 0.0 et 1.0.
def rvb(rouge, vert, bleu):
    return (rouge/255.0, vert/255.0, bleu/255.0)

# Pour l'inspiration :
# http://www.chromaticstore.com/outils
#      puis : "Lancer l'application" et "Nuancier"
# http://www.agence-casanova.fr/professionnel/
#      identitaire/pantone.html
# Et après on ajuste selon son goût...

# On définit la fonction f (automatiquement
# vectorialisée, puisqu'on utilise le log de numpy).
def f(x):
    return np.log(x)/(1+x**2)

# On crée un échantillon d'abscisses
x = np.linspace(0.05,10)
# On prend l'image de cet échantillon par f (tout
# l'intérêt de la vectorialisation apparaît ici)
y = f(x)
# On trace la courbe
plt.plot(x,y,'black')
# On colore les aires selon la position par rapport
# à l'axe des abscisses
plt.fill_between(x, y, where=y>=0,\
                 facecolor=rvb(150, 224, 150))
plt.fill_between(x, y, where=y<=0,\
                 facecolor=rvb(234, 107, 123),
                 interpolate=True)

# Et on affiche
plt.show()
```