Réduction des endomorphismes [62, 192]

62. Soit x, un vecteur propre de u.

Comme les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles, alors la droite vectorielle dirigée par x est un sous-espace propre de u.

Comme u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v. La droite $\mathbb{K} \cdot x$ est donc stable par v.

Or une droite $\mathbb{K} \cdot x_0$ est stable par v si, et seulement si, son vecteur directeur x_0 est un vecteur propre de v.

Donc x est aussi un vecteur propre de v.

192. On note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, l'endomorphisme u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

1. **On suppose qu'il existe** une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M^2 = A.$$

En notant v, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M, la relation $M^2 = A$ se traduit alors par $v \circ v = u$. En particulier,

$$u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ u,$$

donc u et v commutent et d'après **61.**, tout vecteur propre de u est aussi un vecteur propre de v.

Comme u est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de u (et donc de vecteurs propres de v).

En notant Q, la matrice (inversible !) de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathscr{B}$, les matrices

$$Q^{-1}AQ = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad \text{et} \quad Q^{-1}MQ = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$$

sont donc toutes les deux diagonales.

2. Poursuivons notre *analyse* : il existe n réels positifs λ_1, ..., λ_n tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(puisque les valeurs propres de A sont positives). **Si** les valeurs propres de M sont aussi positives, alors il existe n réels positifs μ_1, ..., μ_n tels que

$$Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

La condition $A = M^2$ donne alors $Q^{-1}AQ = Q^{-1}M^2Q = (Q^{-1}MQ)^2$ et donc

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2).$$

Comme les μ_k sont tous positifs, il faut donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \mu_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

Il faut donc que

$$Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\big)$$

et comme l'application $\big[W \mapsto Q^{-1}WQ\big]$ est une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, cela prouve que **la seule matrice** $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ **possible** telle que $A = M^2$ et ayant n valeurs propres positives **serait** la matrice définie par :

$$M = Q\,\mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\big)Q^{-1}.$$

NB ! Tout ce qui précède n'a de sens que sous l'*hypothèse* initiale : on a *supposé* qu'il existait une matrice M telle que... En formulant la conclusion précédente au conditionnel, on a constaté que le problème étudié admettait *au plus une* solution (unicité), mais on n'a pas encore justifié qu'il admettait *effectivement* une solution (existence).

Synthèse.

Comme A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible Q et des réels λ_1, ..., λ_n tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Comme les valeurs propres λ_k sont positives, alors la matrice

$$M = Q\,\mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\big)Q^{-1}$$

est bien définie et de plus

$$\begin{aligned} M^2 &= \big[Q\,\mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\big)Q^{-1}\big]^2 \\ &= Q\Big[\mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\big)\Big]^2 Q^{-1} \\ &= Q\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1} \\ &= A. \end{aligned}$$

Cette fois, on a bien prouvé que le problème étudié admettait une, et une seule, solution !

REMARQUE.— Très souvent, la synthèse ne fait que reprendre des calculs déjà faits, mais *dans un cadre logique différent*. Si les calculs permettent de fonder une preuve, une démonstration ne se réduit jamais à un calcul : c'est pourquoi (en dépit des apparences) on ne démontre pas la même chose lors de l'analyse et lors de la synthèse. C'est pourquoi on ne doit pas négliger la rédaction de la synthèse...