Intégrales [101.4]

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé (une fois pour toutes). On étudie ici la fonction S définie par

$$S(t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sin(xt) \cdot \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n \sin xt,$$

c'est-à-dire à la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, +\infty[, \quad u_n(t) = e^{-nt} \sin(xt).$$

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est continue sur $[0, +\infty[$. Pour t voisin de $+\infty$, on a $u_n(t) = \mathcal{O}(e^{-nt})$ et comme $n > 0$, on en déduit que u_n est intégrable sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

❧ La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I (en tant que somme d'une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$).

❧ La somme S de cette série est clairement continue sur I (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur I).

❧ Il reste maintenant à prouver que la série de terme général

$$I_n = \int_0^{+\infty} \big|u_n(t)\big| \, dt$$

est convergente afin de pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

❧ Soit $n \geqslant 1$. Il est clair que

$$\forall\, t \in I, \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant e^{-nt}. \tag{1}$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \big|u_n(t)\big| \, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt} \, dt = \frac{1}{n}.$$

Hélas, la série harmonique $\sum {}^{1}\!/_{n}$ est divergente et cette première majoration ne permet pas de conclure.

On peut comprendre cet échec en étudiant l'intégrabilité de la fonction S. Cette fonction est clairement continue sur $]0, +\infty[$ et

$$\big|S(t)\big| = \frac{|\sin(xt)|}{1 - e^{-t}} \cdot e^{-t}$$

donc $S(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ lorsque t tend vers $+\infty$. Mais lorsque t tend vers 0,

$$S(t) \sim \frac{xt}{t} = x$$

donc S admet une limite finie en 0^+, tandis que

$$\frac{1}{e^t - 1} \sim \frac{1}{t}.$$

On voit maintenant qu'en éliminant le sin dans la majoration (1), on perd le facteur qui rend S intégrable au voisinage de l'origine. Il faut donc chercher un majorant qui tienne compte du sin !

❧ On *doit savoir* que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad |\sin u| \leqslant |u|. \tag{2}$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in I, \quad \big|u_n(t)\big| \leqslant |xt| e^{-nt} \tag{3}$$

et la fonction $[t \mapsto te^{-nt}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \geqslant 1$. Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \int_0^{+\infty} \big|u_n(t)\big| \, dt \leqslant |x| \int_0^{+\infty} te^{-nt} \, dt = \frac{|x|}{n^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u} \, du$$

avec le changement de variable affine $u = nt$.

Comme $[u \mapsto ue^{-u}]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (on l'a déjà dit), la dernière intégrale est un réel fini (qu'il est inutile de préciser — il est égal à 1). On a donc démontré cette fois que

$$\int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \tag{4}$$

et donc que la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|u_n(t)\right| dt$$

est convergente.

❧ On peut alors déduire du théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt &= \mathfrak{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-n+ix)t}\,dt = \mathfrak{Im}\Big[\frac{e^{(-n+ix)t}}{-n+ix}\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{x}{n^2+x^2},\end{aligned}$$

donc finalement

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}.$$

REMARQUE.— Voici maintenant une autre méthode pour justifier la possibilité d'intégrer terme à terme.

On a remarqué plus haut que la fonction S est la limite, au sens de la convergence simple sur l'intervalle I, de la suite des fonctions définies par

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t).$$

Or il s'agit d'une somme *géométrique* ! Donc

$$\left|f_n(t)\right| = \left|\sin(xt)\cdot\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}\cdot e^{-t}\right| \leqslant \frac{|\sin xt|\,e^{-t}}{1-e^{-t}} = \left|S(t)\right|$$

et la convergence est dominée : on a trouvé un majorant *indépendant* de $n \in \mathbb{N}^*$ et *intégrable* sur I (démontré plus haut). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_k(t)\,dt.\end{aligned}$$

REMARQUE.— On peut établir l'ordre de grandeur (4) de deux autres manières, plus précises (mais plus longues aussi).

Le changement de variable *affine* $u = xt$ en supposant $\boxed{x > 0}$, la relation de Chasles et le second changement de variable *affine* $v = u - k\pi$ (pour $k \in \mathbb{N}$) nous donnent

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-nt}|\sin xt|\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-nu/x}|\sin u|\frac{du}{x} &(5)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-nu/x}|\sin u|\frac{du}{x} &(6)\\ &= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-nk\pi/x}\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv &(7)\end{aligned}$$

puisque $\sin v \geqslant 0$ pour tout $v \in [0,\pi]$.

Dans (7), l'intégrale ne dépend plus de k et on peut (pardon : on doit !) reconnaître une somme géométrique. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}|\sin xt|\,dt = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-e^{-n\pi/x}}\int_0^{\pi} e^{-nv/x}\sin v\,dv. \tag{8}$$

Classiquement, on trouve un ordre de grandeur d'une telle intégrale en intégrant par parties. Pour le coup, il faut intégrer *deux fois* par parties (à chaque fois en intégrant l'exponentielle et en dérivant la composante trigonométrique). On trouve :

$$\int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv = \frac{x}{n} \int_0^\pi e^{-nv/x} \cos v \, dv, \tag{9}$$

$$\int_0^\pi e^{-nv/x} \cos v \, dv = \frac{1 + e^{-n\pi/x}}{n} \cdot x + \frac{x}{n} \int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv \tag{10}$$

et en combinant (9) et (10), on trouve

$$\int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv = \frac{x^2}{n^2}\left(1 + e^{-n\pi/x}\right) - \frac{x^2}{n^2} \int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv. \tag{11}$$

Devant (11), deux attitudes sont possibles :

– L'Ancienne école, qui se réjouit de pouvoir en déduire une expression explicite de l'intégrale cherchée !

$$\int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv = \frac{x^2}{n^2 + x^2} \left(1 + e^{-n\pi/x}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{12}$$

– L'École moderne (à laquelle, pour une fois ! j'appartiens) se contente de remarquer que

$$0 \leqslant 1 + e^{-n\pi/x} \leqslant 2$$

et que

$$0 \leqslant \int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv \leqslant \int_0^\pi 1 \, dv = \pi$$

ce qui suffit à prouver que

$$\int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{13}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

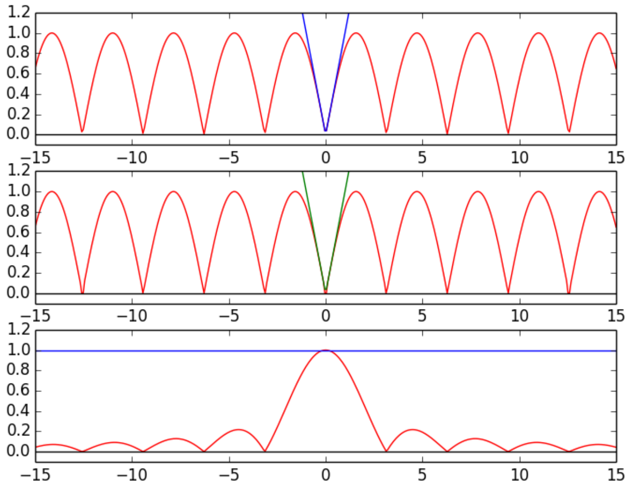
Quelle que soit la manière choisie (12) ou (13), l'estimation (4) peut alors être déduite de (11).

Remarque.— Par principe, l'École moderne n'a pas très envie de calculer des expressions explicites lorsqu'elle peut se contenter d'un ordre de grandeur trouvé d'un coup d'œil (l'École moderne a un très bon coup d'œil) et, si on cherche vraiment à calculer cette intégrale, autant passer par les complexes :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-nv/x} \sin v \, dv &= \mathfrak{Im} \int_0^\pi \exp\left[\left(\frac{-n}{x} + i\right)v\right] dv \\ &= \mathfrak{Im}\left[\frac{1}{i - \frac{n}{x}} \exp\left[\left(\frac{-n}{x} + i\right)v\right]\right]_0^\pi = \ldots\end{aligned}$$

REMARQUE.— Un dernier mot, à propos de la majoration (2). Cette majoration peut être comprise d'un point de vue analytique (variations de la fonction *sinus cardinal*) ou d'un point de vue géométrique (concavité de la fonction sin sur $[0, \pi]$).

C'est ce que montrent les graphes ci-dessous.



On pourra retenir la manœuvre effectuée dans le code ci-dessous (lignes 13 à 15) qui rend le second graphe plus beau que le premier (les arches touchent l'axe des abscisses sur la seconde figure, mais pas sur la première).

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  x = np.linspace(-15, 15, 400) # échantillon des abscisses
5  y = np.abs(np.sin(x))         # image de l'échantillon
6
7  plt.subplot(3,1,1)
8  plt.ylim(-0.1, ymax=1.2)
9  plt.plot(x, y, 'r')
10 plt.plot(x, np.abs(x), 'b')
11 plt.plot(x, np.zeros(x.shape), 'black') # axe des abscisses
12
13 for i, val in enumerate(y):
14     if val<0.05:
15         y[i] = 0.0
16
17 plt.subplot(3,1,2)
18 plt.ylim(-0.1, ymax=1.2)
19 plt.plot(x, y, 'r')
20 plt.plot(x, np.abs(x), 'g')
21 plt.plot(x, np.zeros(x.shape), 'black')
22
23 plt.subplot(3,1,3)
24 plt.ylim(-0.1, ymax=1.2)
25 plt.plot(x, np.abs(np.sin(x)/x), 'r')
26 plt.plot(x, np.ones(x.shape), 'b')
27 plt.plot(x, np.zeros(x.shape), 'black')
28
29 plt.show()
```