RMS 2023 [CCINP 1285]

> *On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \geqslant 2$) pour laquelle $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.*
>
> **1❧** *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
>
> **2❧** *Déterminer les éléments propres de A.*
>
> **3❧** *Calculer le déterminant de A.*

1❧ La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (Théorème spectral).

✍ *La seconde question est la seule intéressante ! Nous allons en présenter deux solutions. Un court rappel pour comprendre la première : si un endomorphisme u est diagonalisable, alors*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, I_E).$$

Si u n'est pas inversible, alors $\lambda = 0 \in \mathrm{Sp}(u)$ et si u n'est pas identiquement nul, alors il admet au moins une valeur propre non nulle.

Si λ_0 est une valeur propre non nulle de u et x_0, un vecteur propre de u associé à λ_0, alors

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot u(x_0) = u\Big(\frac{1}{\lambda_0} \cdot x_0\Big) \in \mathrm{Im}\, u.$$

Par conséquent,

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \underbrace{\Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, I_E)\Big)}_{\subset \mathrm{Im}\, u}.$$

Comme u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que

$$\mathrm{Im}\, u = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, I_E)$$

et donc que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Une dernière précision : cette dernière propriété n'est pas réservée aux endomorphismes diagonalisables ! On peut démontrer qu'elle équivaut au fait que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ ou, si on préfère, au fait que le sous-espace propre associé à 0 soit égal au sous-espace caractéristique associé à 0 ou encore au fait que la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique soit inférieure à 1.

Et maintenant, reprenons !

2❧ **Première version** : on considère l'endomorphisme $u \in L(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à la matrice A. Il est clair que le rang de u est égal à 2 :

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), u(e_2)\big) = \mathrm{Vect}\,(e_1 + \cdots + e_n,\ e_1)$$

et que, si $n \geqslant 3$,

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(u - 0 \cdot I_E) = \mathrm{Vect}\,(e_3 - e_2, \ldots, e_n - e_2).$$

(Pour $n = 2$, le noyau de u est réduit au vecteur nul. On y reviendra à la question suivante !)

Comme u est diagonalisable, alors

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$$

et comme le plan $P = \operatorname{Im} u$ est stable par u, on peut définir l'endomorphisme $v \in L(P)$ induit par restriction de u au plan P. Les valeurs propres non nulles de u sont alors les valeurs propres de v et les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres non nulles sont les vecteurs propres de v.

Le plan P admet une base naturelle : $\mathscr{B}_P = \big(u(e_1), u(e_2)\big)$ et comme

$$\begin{aligned} u\big(u(e_1)\big) &= u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} u(e_k) = u(e_1) + (n-1)u(e_2) \\ u\big(u(e_2)\big) &= u(e_1), \end{aligned}$$

la matrice de v relative à cette base $\mathscr{B}_P$ est

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de A (c'est-à-dire les valeurs propres de A_P) sont les racines du polynôme

$$X^2 - X - (n-1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Cette expression moche n'est pas un problème ! En effet, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres (qui sont des vecteurs propres aussi bien pour u que pour v, tout est là !) sont représentés dans la base $\mathscr{B}_P$ par les vecteurs non nuls du noyau de

$$A_P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ n-1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit de regarder la première ligne de cette matrice (dont le rang est égal à 1 puisque λ est une valeur propre de A_P...) pour en déduire que les vecteurs propres de A_P associés à la valeur propre λ sont proportionnels à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathbb{R} \cdot \big[u(e_1) + (\lambda - 1) \cdot u(e_2)\big] = \mathbb{R}\Big[\lambda \cdot e_1 + \sum_{k=2}^{n} e_k\Big].$$

Deuxième version : Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (alias le noyau) est égale à $(n-2)$, la somme des dimensions des autres sous-espaces propres est égale à 2 et il y a donc au plus deux valeurs propres non nulles (peut-être une valeur propre double ?). Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et par conséquent son degré est au plus égal à 3. (De plus, comme $0 \in \operatorname{Sp}(A)$, le terme constant du polynôme minimal est nul.)

On prend le temps de poser le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2n-1 & n & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que la famille (I_n, A, A^2) est libre et que

$$A^3 = A^2 + (n-1)A,$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^3 - X^2 - (n-1)X.$$

On en déduit sans difficulté les trois valeurs propres de A et les sous-espaces propres comme plus haut.

✍ *La dimension des sous-espaces propres nous permet d'en déduire que le polynôme caractéristique de A est égal à*

$$X^{n-2}\big(X - X - (n-1)\big).$$

$\boxed{3}$❧ Comme le rang de A est égal à 2, il n'y a que deux cas possibles :
— si $n \geqslant 3$, alors la matrice A n'est pas inversible et $\det A = 0$;
— si $n = 2$, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$