Intégrales [73.3, 76.]

[73.3]
On doit bien sûr *commencer* par justifier l'existence de l'intégrale généralisée $F(x)$.

La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$$

est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$,

$$f(t) = o(e^{-t}),$$

donc f est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

REMARQUE.— Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim {}^1\!/_t$, donc f est intégrable sur tous les intervalles $[x, +\infty[$ (avec $x > 0$) sans être pour autant intégrable sur $]0, +\infty[$. Cela mérite qu'on s'en souvienne...

Étude au voisinage de $+\infty$

La fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ est une fonction *positive* et *intégrable* au voisinage de $+\infty$. Comme $f(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, alors **[71.4]**

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt\right).$$

Or, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_x^{+\infty} = e^{-x},$$

donc

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = o(e^{-x})$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Comme f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on peut affirmer directement **[10.4]** que

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

mais on a obtenu ici un résultat bien plus précis.

Étude au voisinage de 0

La fonction $[t \mapsto {}^1\!/_t]$ est une fonction *continue*, *positive* et *non intégrable* au voisinage de 0. Comme $f(t) \sim {}^1\!/_t$ au voisinage de 0, alors **[72.5]**

$$\int_x^1 f(t)\,dt \sim \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ell n\, x$$

lorsque x tend vers 0.

Comme f est intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit de la relation de Chasles que

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_x^1 f(t)\,dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(t)\,dt}_{=\text{Cte}} \\ &= -\ell n\, x + o(\ell n\, x) + \mathcal{O}(1) \\ &\sim -\ell n\, x.\end{aligned}$$

REMARQUE.— On a dit plus haut que f était positive, intégrable au voisinage de $+\infty$, mais pas intégrable au voisinage de 0. On aurait pu en déduire directement que

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$

En appliquant un théorème d'intégration des relations de comparaison, on a obtenu ici un résultat bien plus précis (bis).

[76]
On intègre par parties en dérivant la fraction (et donc en intégrant l'exponentielle). Quels que soient $0 < x < y$ *fixés*,

$$\int_x^y \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \left[\frac{-e^{-t}}{t}\right]_x^y - \int_x^y -\frac{-e^{-t}}{t^2}\,dt.$$

La fonction f_2 définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f_2(t) = \frac{e^{-t}}{t^2}$$

est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et $f_2(t) = o(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc f_2 est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$. On peut donc faire tendre y vers $+\infty$ et en déduire que

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt. \tag{1}$$

Il nous reste à estimer la dernière intégrale à l'aide d'un encadrement simple (la méthode qui suit est archi-classique).

Il est clair que

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2}. \tag{2}$$

Les trois fonctions de cet encadrement étant intégrables au voisinage de $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x^2}. \tag{3}$$

Cet encadrement montre que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big) \tag{4}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. On déduit alors de (1) que

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big). \tag{5}$$

REMARQUE.— Il faut acquérir un peu d'expérience (c'est-à-dire faire pas mal de calculs) avant d'arriver spontanément à l'encadrement (2). L'encadrement suivant serait tout aussi juste :

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{t^2}$$

mais donnerait après intégration :

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-x}}{x}$$

ce qui serait infiniment moins utile que (3), puisqu'on pourrait seulement en déduire que

$$F(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x}\Big).$$