Séries entières [96]

[96.1] Soient $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction u_k définie par

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad u_k(t) = a_k r^k e^{i(k-n)t}$$

est continue sur le segment $[0, 2\pi]$. De plus,

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad \big|u_k(t)\big| = |a_k| r^k$$

et comme le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k z^k$ est infini, la série $\sum a_k r^k$ est absolument convergente, donc la série de fonctions $\sum u_k$ converge *normalement* sur le *segment* $[0, 2\pi]$.

Par conséquent, la fonction S_n définie par

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad S_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) = S(re^{it})e^{-int}$$

est continue sur le segment $[0, 1]$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale, et on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{2\pi} S_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\,dt = 2\pi a_n r^n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r > 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{it})e^{-int}\,dt.$$

REMARQUE.— La fonction S_n n'est pas la somme d'une série entière : il faut donc appliquer la théorie des séries de fonctions pour justifier l'intégration terme à terme, la théorie des séries entières ne suffit pas.

[96.2] Supposons que la fonction S soit bornée sur $\mathbb{C}$: il existe donc un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \big|S(t)\big| \leqslant M$$

et par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r > 0,\ \forall\, t \in [0, 2\pi], \quad \big|S(re^{it})e^{-int}\big| \leqslant M.$$

On déduit alors de l'inégalité de la moyenne que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, r > 0, \quad |a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}(2\pi M).$$

Comme r est quelconque, on peut faire tendre r vers $+\infty$: comme r^n tend vers $+\infty$ pour tout $n \geqslant 1$ (mais pas pour $n = 0$...), on déduit de cet encadrement que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par conséquent, la fonction S est constante (théorème de Liouville) :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad S(z) = a_0.$$

[96.3] On sait que la fonction cos est développable en série entière avec un rayon de convergence infini :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

On sait aussi que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$ mais pas constante.

Il n'y a pas de contradiction avec ce qui précède, car cos est bornée sur $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{C}$! En effet,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \cos(it) = \operatorname{ch} t.$$