Intégrales [96.7]

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, t > 0, \quad f_n(t) = \frac{n \operatorname{Arctan} {}^{t}/_{n}}{t + t^3}.$$

❧ Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}^*$:

– Il est clair que la fonction f_n est continue sur $I =]0, +\infty[$.

– Le numérateur est borné sur I, donc

$$f_n(t) = \mathcal{O}({}^{1}/_{t^3})$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

– Comme $\operatorname{Arctan} u \sim u$ pour u voisin de 0 et que ${}^{t}/_{n}$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, alors

$$f_n(t) \sim \frac{n \cdot {}^{t}/_{n}}{t} = 1$$

donc f_n tend vers 1 au voisinage de 0.

Par conséquent, toutes les fonctions f_n sont intégrables sur I.

❧ Fixons maintenant $t \in I$. Lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient ${}^{t}/_{n}$ tend vers 0, donc

$$n \operatorname{Arctan} {}^{t}/_{n} \sim n \cdot \frac{t}{n} = t.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur I vers la fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{t}{t + t^3} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Il est clair que cette fonction f est continue et intégrable sur I.

❧ Il reste enfin à vérifier la domination pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée.

Pour cela, *il faut savoir* que Arctan est positive et concave sur I, donc

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \operatorname{Arctan} u \leqslant u.$$

On en déduit alors que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{1 + t^2}.$$

On a trouvé un majorant *indépendant de* n et *intégrable* sur I : la convergence est bien dominée.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \big[\operatorname{Arctan} t\big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

et cette limite peut être réécrite sous la forme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} {}^{t}/_{n}}{t + t^3}\, dt \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$