Planche I

Exercice I.1

1. On note $\mathscr{P}$, l'ensemble des nombres premiers et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{\ell n\, n}{n(n+1)} \quad \text{si} \quad n \in \mathscr{P}$$

et $u_n = 0$ si $n \notin \mathscr{P}$.

1.1 La propriété suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

1.2 Démontrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

1.3 Donner un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ sur lequel la fonction

$$f = \Big[t \mapsto \frac{\ell n\, t}{t(t+1)}\Big]$$

est décroissante.

Comment tracer l'allure du graphe de f à l'aide de Python ?

1.4 En comparant la somme à une intégrale, démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant 2\sqrt{n}.$$

1.5 Comment calculer une valeur approchée de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

à 10^{-3} près ? (On pourra utiliser la fonction `isprime(n)` du module `sympy` qui renvoie le booléen `True` lorsque l'entier n est premier et `False` dans le cas contraire.)

Exercice I.2

2. On considère un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients réels et on suppose que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0.$$

2.1 Donner un polynôme P_1 de degré 2 et de discriminant strictement négatif ainsi qu'un polynôme P_2 de degré 2 et de discriminant positif tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad P_2(x) \geqslant 0.$$

2.2 On suppose que le polynôme P possède une racine réelle α. Que dire de la multiplicité de la racine α ?

2.3 On suppose que le polynôme P possède une racine complexe

$$z_0 = \alpha + i\beta$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$.

Démontrer que $\overline{z_0}$ est aussi racine de P et que la multiplicité de $\overline{z_0}$ est égale à la multiplicité de z_0.

2.4 En déduire qu'il existe des polynômes

$$A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$$

à coefficients réels tels que

$$P = \prod_{k=1}^{n} (A_k^2 + B_k^2)$$

2.5 En remarquant que

$$A_k^2 + B_k^2 = (A_k + iB_k)(A_k - iB_k),$$

démontrer qu'il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que

$$P = A^2 + B^2.$$

Planche II

Exercice II.1

3. On considère n nombres réels $x_1, \dots, x_n$.

3.1 Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

3.2 On suppose que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0.$$

Démontrer que tous les x_k sont nuls.

4. Soient n, un entier naturel supérieur à 2 et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x_k = \exp \frac{2ik\pi}{n}.$$

Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant p < n, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^p = 0.$$

Que vaut la somme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p$$

pour $p = 0$? pour $p = n$?

5. On considère n nombres complexes $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et non nuls. On suppose qu'il existe n entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_n$ tels que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^p = 0.$$

5.1 On considère un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ de la forme

$$Q = a_1 X + \cdots + a_d X^d.$$

Que vaut la somme suivante ?

$$\sum_{k=1}^{n} m_k Q(x_k)$$

Ce résultat est-il également valable pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$?

5.2 Démontrer que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, il existe un polynôme $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$Q_k(x_k) = 1, \quad Q_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, \ell \neq k, \quad Q_k(x_\ell) = 0.$$

5.3 Que peut-on en déduire ?

5.4 Relier le résultat obtenu au déterminant de Vandermonde.

Exercice II.2

6. On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}\, \ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{1}{2t}\Big).$$

6.1 Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

6.2 Calculer un équivalent de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$; lorsque t tend vers 0.

6.3 Calculer la dérivée de f.

6.4 Tracer l'allure du graphe de f.

Planche III

Exercice III.1

7. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

7.1 Démontrer que l'application

$$u = \left[f \mapsto f'\right]$$

est un endomorphisme de E.

7.2 Pour $f \in E$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $F \in E$ et que l'application

$$v = [f \mapsto F]$$

est un endomorphisme de E.

7.3 Exprimer $(v \circ u)(f)$ en fonction de f. En déduire que l'endomorphisme $v \circ u$ n'est ni injectif, ni surjectif.

7.4 Exprimer $(u \circ v)(f)$ en fonction de f.

8. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie ; u et v, deux endomorphismes de E.
Démontrer que $u \circ v$ est injectif si, et seulement si, $v \circ u$ est injectif.

Exercice III.2

9. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{-2}{(x+i)}.$$

9.1 Calculer $\mathfrak{Re}\, f(x)$ et $\mathfrak{Im}\, f(x)$.

9.2 Démontrer que la fonction f admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$.

9.3 Soit F, une primitive de f.

1. Exprimer F à l'aide des fonctions ℓn et Arctan.
2. Tracer l'allure du graphe de $\mathfrak{Re}\, f$ et de $\mathfrak{Re}\, F$ sur une même figure.
3. Simplifier l'expression $\exp[F(x)]$.

Exercice III.3

10. On *admet* que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

tend vers 0.

10.1 Écrire en langage Python une fonction `u(n)` qui renvoie, en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n. Pour assurer la meilleure précision des calculs, on veillera à ne pas utiliser de trop grands nombres.

10.2 Comment utiliser cette fonction pour vérifier numériquement que $u_n = \mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Planche IV

Exercice IV.1

11. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

11.1 Que vaut la somme suivante ?

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$$

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant C_n \leqslant \sqrt{n}.$$

11.2 Simplifier le quotient

$$q_n = \frac{C_{n+1}}{C_n}$$

et en déduire un développement limité de q_n à $o(1/n^2)$ près.

11.3 Démontrer que la série $\sum \ell n\, q_n$ est absolument convergente.

11.4 En déduire que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Exercice IV.2

12. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

et on note u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.

12.1 Quel est le rang de u ? Quelle est sa trace ? son déterminant ?

12.2 Donner une base de $\operatorname{Im} u$ et une une base de $\operatorname{Ker} u$.

12.3 On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.4 En déduire M^2 ainsi que $\det(I_3 + M)$.

12.5 Trouver une colonne $V \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice M soit proportionnelle au produit $V.V^\top$. Calculer $V^\top.V$.

Planche V

Exercice V.1

13. On considère la fonction f définie par

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}.$$

13.1 Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
13.2 Calculer les dérivées partielles de f.
13.3 À l'aide du théorème de la bijection, démontrer que l'équation

$$e^{-x} = x$$

possède une, et une seule, solution dans $\mathbb{R}$.
13.4 Démontrer qu'il existe un, et un seul, couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Exercice V.2

14. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible P et des nombres réels λ_1, ..., λ_n tels que

$$P^{-1}.A.P = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

14.1 Exprimer $\mathrm{tr}\,A$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction des scalaires λ_1, ..., λ_n.
14.2 Démontrer que le rang de A est égal au cardinal de l'ensemble

$$R = \big\{1 \leqslant k \leqslant n \ :\ \lambda_k \neq 0\big\}.$$

14.3 En déduire que

$$[\mathrm{tr}\,A]^2 \leqslant \mathrm{rg}\,A.\,\mathrm{tr}(A^2).$$

Planche VI

Exercice VI.1

15. On étudie ici la fonction f qui vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - f(x) = e^x$$

et $f(0) = 0$.

15.1 Déterminer l'expression de f, ainsi que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$ de la fonction f.

15.2 Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = [-1, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

15.3 Sur quelle partie de J la bijection réciproque f^{-1} est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$?

15.4 Que vaut $y_0 = f^{-1}(0)$? Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de y_0 de la fonction f^{-1}.

15.5 Tracer le graphe de f et celui de f^{-1} sur une même figure.

Exercice VI.2

16. On considère deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n + 1$.

16.1 Combien y a-t-il de manières de choisir $(n + 1)$ éléments dans l'ensemble $[\![1, p]\!]$?

16.2 On choisit $(n + 1)$ éléments dans l'ensemble $[\![1, p]\!]$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour le plus grand élément choisi ?
2. On suppose que le plus grand élément choisi est égal à k. Combien y a-t-il de manières de choisir les éléments restants ?
3. Traduire l'analyse précédente par une identité. Quelle relation bien connue cette identité généralise-t-elle ?

Exercice VI.3

17. On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = -A.$$

17.1 Comparer $\det A$ et $\det(A^\top)$.

17.2 On suppose que la matrice A est inversible. Que peut-on en déduire sur n ?

Planche VII

Exercice VII.1

18. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X$$

ainsi que par la relation de récurrence suivante.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

18.1 Calculer T_2 et T_3.

18.2 Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme T_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers et que son coefficient dominant est égal à 2^{n-1}.

18.3 Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-1, 1], \quad \left|T_n(x)\right| \leqslant 1.$$

18.4 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Exercice VII.2

19. On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = x - \frac{1}{x}.$$

19.1 Étudier les variations de f.

19.2 Calculer la primitive F de f qui s'annule en $x = 1$. Tracer l'allure des graphes de f et de F sur une même figure.

19.3 Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I =]0, +\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera. Sur quelle partie de J la bijection réciproque f^{-1} est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^2$?

19.4 Indiquer comment tracer le graphe de f et celui de f^{-1} sur une même figure à l'aide du langage Python.

19.5 Démontrer que la bijection réciproque f^{-1} est lipschitzienne.

Planche VIII

Exercice VIII.1

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère l'application f définie par

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = nXP(X) - (X^2-1)P'(X).$$

20.1 Démontrer que f est un endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
20.2 Calculer la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
20.3 L'endomorphisme f est-il inversible ? Quelle est son image ?

21. Démontrer que la famille

$$\mathscr{B} = \big((X+1)^k(X-1)^{n-k}\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice VIII.2

22. On considère les fonctions f et g définies par

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = e^{-x^2+2y^2}$$
$$\text{et} \quad g(x,y) = 3x^2 + y^2.$$

22.1 Démontrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
22.2 Calculer le gradient de f et le gradient de g. En quels points $M = (x,y)$ ces deux vecteurs sont-ils proportionnels ?
22.3 Démontrer que, pour tout réel $M > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$g(x,y) \leqslant M \implies |x| \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad |y| \leqslant \alpha.$$

22.4 Démontrer que $g(x,y) = 1$ si, et seulement si, il existe un réel $0 \leqslant t < 2\pi$ tel que

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \quad \text{et} \quad y = \sin t.$$

En déduire une manière de tracer la courbe d'équation $[g(x,y) = 1]$ à l'aide de Python. Cette courbe possède-t-elle des axes de symétrie ? un centre de symétrie ?

Planche IX

Exercice IX.1

23. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

23.1 Calculer A^2 et A^4.
23.2 On suppose qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et une colonne

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{C})$$

tels que $AV = \lambda V$.
Démontrer que $\lambda^4 = 1$ et que

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

23.3 Réciproquement, on pose

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un scalaire tel que $\lambda^4 = 1$.
Vérifier que $AV_\lambda = \lambda V_\lambda$, puis que

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[X], \quad Q(A).V_\lambda = Q(\lambda).V_\lambda.$$

23.4 Démontrer que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1}Q(A)P = \operatorname{Diag}\big(Q(1), Q(i), Q(-1), Q(-i)\big)$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$.
23.5 En déduire que

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[X], \quad \operatorname{tr} Q(A) = 4Q(0)$$

puis calculer $\det Q(A)$.

Exercice IX.2

24. On considère l'équation différentielle suivante.

$$(\star) \qquad \forall\, x > 0, \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = e^x$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est noté $\mathscr{S}$.
24.1 Démontrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ est contenu dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. L'ensemble $\mathscr{S}$ est-il un sous-espace de E ? Vérifier que

$$\forall\, f, g \in \mathscr{S},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1-\alpha)f + \alpha g \in \mathscr{S}.$$

24.2 Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\star)$ qui sont de la forme $[x \mapsto x^r]$.
24.3 Soit $z \in E$.

1. Démontrer que la fonction

$$y = \left[x \mapsto \frac{z(x)}{x^2}\right]$$

est solution de l'équation $(\star)$ si, et seulement si, la fonction z est solution d'une équation différentielle très simple.

2. En déduire l'expression des fonctions $y \in \mathscr{S}$.

Planche X

Exercice X.1

25. On pose $Q_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad Q_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

25.1 Démontrer que la famille

$$\mathscr{B}_n = (Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

25.2 Démontrer que l'application Δ définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

25.3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire la matrice A de Δ relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, puis la matrice B de Δ relative à la base $\mathscr{B}_n$ définie ci-dessus.
2. Démontrer qu'il existe une matrice

$$U \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$$

telle que la matrice $U^{-1}AU$ soit une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous nuls.

25.4 Identifier le noyau et l'image de Δ. Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ?

Exercice X.2

26. On définit une fonction

$$f\ :\ [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$\begin{array}{ll} \text{pour } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, & f(x,y) = (1-x)y \\ \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1. & f(x,y) = x(1-y) \end{array}$$

26.1 Justifier que la fonction f est bien définie.

26.2 Calculer les dérivées partielles de f.

26.3 Démontrer que f atteint un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$. Quelle est la valeur de ce minimum ? Où est-il atteint ?

26.4 Pour tout $x \in [0,1]$, justifier l'existence et calculer la valeur de

$$M(x) = \max_{y \in [0,1]} f(x,y).$$

Étudier ensuite l'existence de

$$\max_{x \in [0,1]} M(x).$$

Planche XI

Exercice XI.1

27. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum \frac{e^{(-1+ix)n}}{\sqrt{n}}$$

est-elle absolument convergente ?

Exercice XI.2

28. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(t) = \frac{t^n}{1+t^2}.$$

28.1 Étudier la limite de $u_n(t)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
28.2 Étudier la limite de $u_n(t)$ lorsque t tend vers 0 ; lorsque t tend vers $+\infty$.
28.3 Tracer les graphes des fonctions u_1, u_2 et u_3 sur une même figure.

Exercice XI.3

29. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & & x & n \\ 1 & 2 & 3 & & n & x \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

29.1 Calculer $\det A(x)$. On pourra commencer par effectuer l'opération

$$C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n+1} C_j.$$

29.2 On suppose qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et des scalaires

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

tels que

$$Q^{-1}A(0)Q = \mathrm{Diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

1. Démontrer que

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0.$$

2. Démontrer que

$$Q^{-1}A(x)Q = \mathrm{Diag}(x+\lambda_0, x+\lambda_1, \ldots, x+\lambda_n)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que

$$\{\lambda_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = \Big\{\frac{-n(n+1)}{2}, 1, \ldots, n\Big\}.$$

Expliquer pourquoi on n'a pas nécessairement

$$(\lambda_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n) = \Big(\frac{-n(n+1)}{2}, 1, \ldots, n\Big).$$

Planche XII

Exercice XII.1

30. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

30.1 Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \,\mathrm{d}t.$$

En déduire que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

30.2 On choisit $0 < \alpha < \pi/2$.

1. Démontrer que

$$0 \leqslant \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \sin^{2n+1} \theta \,\mathrm{d}\theta \leqslant \alpha.$$

2. Démontrer que

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2-\alpha} \sin^{2n+1} \theta \,\mathrm{d}\theta \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos^{2n+1} \alpha.$$

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers 0.

Exercice XII.2

31. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note F, la droite vectorielle dirigée par le vecteur

$$\boldsymbol{u} = (2, 2, 1).$$

31.1 Démontrer que l'ensemble G représenté par l'équation

$$x - 2y + 3z = 0$$

est un plan vectoriel.

31.2 Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils orthogonaux ?

31.3 Calculer la matrice relative à la base canonique de la projection p sur G parallèlement à F.

31.4 À l'aide d'un vecteur normal à G, calculer la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale p_0 sur G.

31.5 Calculer une base orthogonale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de G. En déduire une base orthogonale

$$B_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de p_0 dans la base $\mathscr{B}_0$?