Intégrales [68.3, 69.3]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t^2}}{t^n}$$

est clairement continue sur $]0, +\infty[$ et $f_n(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$, donc la fonction f_n est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x > 0$.

[68.3] On fixe dorénavant un entier $n \geqslant 2$.

Comme la fonction $\left[t \mapsto e^{-t^2}\right]$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{e^{-x^2}}{t^n}. \tag{1}$$

Comme $n \geqslant 2$, le majorant est une fonction (de la variable t) intégrable sur $[x, +\infty[$:

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant e^{-x^2} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{e^{-x^2}}{(n-1)x^{n-1}}.$$

On en déduit enfin que

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big) \tag{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$. (Comme n est *fixé*, le facteur $(n-1)$ qui figure au dénominateur doit être traité comme une constante.)

Remarque.— Comme f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$, on sait **[10.3]** que l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. L'ordre de grandeur (2) est plus précis.

Remarque.— On peut faire encore plus précis car l'encadrement (1) est tout juste digne d'un *stagiaire*.

Le *Maître* verra, lui, l'encadrement suivant :

$$\forall\, t \geqslant x, \quad 0 \leqslant f_n(t) = \frac{te^{-t^2}}{t^{n+1}} \leqslant \frac{te^{-t^2}}{x^{n+1}}$$

et en déduira, par intégration sur $[x, +\infty[$, que

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}}$$

et par conséquent que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (et pas seulement $n \geqslant 2$),

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n+1}}\Big) \tag{3}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

[69.3] Nous allons intégrer par parties pour trouver un ordre de grandeur plus précis (méthode archi-classique). Pour $0 < x < y$, on remarque que

$$\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{1}{2}\int_x^y \frac{2te^{-t^2}}{t^{n+1}}\,dt$$

et on en déduit que

$$\int_x^y \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \left[\frac{-e^{-t^2}}{2t^{n+1}}\right]_x^y - \int_x^y \frac{-(n+1)}{2}\cdot\frac{-e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt.$$

Comme les fonctions f_n et f_{n+2} sont intégrables au voisinage de $+\infty$, on peut faire tendre y vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall\, x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,dt. \tag{4}$$

On déduit alors de (3) (avec $n \leftarrow n+2$) que

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^n}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{(n+2)+1}}\Big) = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n+3}}\Big), \tag{5}$$

estimation digne d'un *Grand maître* (comparer avec (3)...).

❧ On en déduit en particulier (pour $n = 0$) que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Mais ce n'est pas tout ! Les deux intégrales de (4) sont du même type : on peut donc itérer le procédé. On en déduit (pour $n = 0, 2, 4$ puis 6) que

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt\\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt\\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt\\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \frac{3e^{-x^2}}{8x^5} - \frac{15e^{-x^2}}{16x^7} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^9}\Big).\end{aligned}$$

Le Grand maître n'arrête de calculer que par faute de place !