

Composition de Mathématiques

Le 6 septembre 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

❖ I – Problème ❖

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. **L'usage de toute librairie est interdit.** Les matrices considérées ici sont des matrices carrées, elles sont représentées par des listes des listes : une matrice est identifiée à la liste de ses lignes et chaque ligne est représentée par une liste de coefficients. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est représentée par la liste `[[1,2], [3,4]]`.

Pour définir la matrice d'adjacence $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe ayant n sommets, on numérote les sommets de 0 à $(n - 1)$.

1. Écrire une fonction `produit(A, B)` prenant en argument deux matrices carrées A et B de même dimension, qui renvoie le produit AB .
2. Écrire une fonction `orienté(A)` prenant en argument la matrice d'adjacence A d'un graphe, qui retourne `True` si le graphe est orienté et `False` sinon.

On considère un graphe dont la matrice d'adjacence est la matrice A .

On **admet** que le nombre de chemins de longueur p allant du sommet i au sommet j est égal au coefficient d'indice (i, j) de la matrice A^p .

3. Écrire une fonction `distance(A, i, j)`, où A est la matrice d'adjacence du graphe, et qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour aller du sommet i au sommet j de ce graphe. (On fait l'hypothèse qu'un tel chemin existe.)

❖ II – Problème ❖

Un professeur de mathématiques habite dans un immeuble dont la porte d'entrée est sécurisée par un code à 4 chiffres, les chiffres étant compris entre 0 et 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

On représente un code par une chaîne de quatre caractères. La fonction `creation()` définie ci-dessous renvoie un code choisi aléatoirement.

```
import random
"""
randint(a, b)
    method of random.Random instance
    Return random integer in range [a, b],
    including both end points.
"""

def creation():
    c = random.randint(0, 9999)
    code = "{:0>4}".format(c)
    return code
```

On considère les deux chaînes de caractères suivantes.

```
invite = "Entrez un code à 4 chiffres : "
message = "\nCode trouvé en {} essais."
```

La commande

```
n = input(invite)
```

affiche la chaîne de caractères `invite` sur le terminal et permet de saisir au clavier une chaîne de caractères qui est ensuite affectée à la variable `n`.

La commande

```
print(message.format(k))
```

affiche sur le terminal la chaîne de caractères `message` dans laquelle le motif `{}` a été remplacé par la valeur de `k`.

2. Le professeur a oublié son code. Il va essayer tous les codes au hasard, sans se soucier du fait qu'il les ait déjà essayés ou non...

À l'aide des instructions précédentes et d'une boucle `while`, écrire une fonction `deviner(code)` qui demande une proposition à l'utilisateur jusqu'à ce que la valeur saisie au clavier soit égale à la valeur passée en argument.

On partira du principe que la valeur de l'argument est une chaîne de caractères définie par un appel à la fonction `creation()` et non pas choisie par l'utilisateur.

Pour ne plus oublier son code, le professeur décide de l'écrire sur un morceau de papier. Par prudence, il le crypte en remplaçant chaque chiffre par ce chiffre additionné de 5 et réduit modulo 10. Par exemple, le code 4714 est crypté par 9269.

3. Écrire une fonction `crypte(code)` dont l'argument est une chaîne de quatre caractères numériques et qui renvoie la version cryptée de ce code (également sous la forme d'une chaîne de quatre caractères numériques).

❖ III – Problème ❖

L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. Calculer les matrices $(A + I_3)$, $(A - 3I_3)$ et $(A + I_3)^2$.
En déduire une base de $\text{Ker}(f + I_E)$, une base de $\text{Ker}(f - 3I_E)$ et une équation cartésienne de $\text{Ker}(f + I_E)^2$.
2. Démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f + I_E)^2 \oplus \text{Ker}(f - 3I_E)$$

et calculer la matrice Π qui représente la projection sur $\text{Ker}(f - 3I_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + I_E)^2$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

3. Déterminer une base

$$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$$

telle que la matrice de f relative à cette base \mathcal{B} soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La base \mathcal{B} sera caractérisée par la matrice de passage P de la base canonique \mathcal{B}_0 à la base \mathcal{B} .

4. Exprimer la matrice T^n en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient les relations de récurrence suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 4v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 3v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -3u_n + 4v_n + 2w_n \end{cases}$$

et les colonnes X_n définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

- 5.a. Exprimer X_n en fonction de X_0 , n , T et P .
- 5.b. En déduire qu'il existe trois colonnes C_1 , C_2 et C_3 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = (-1)^n (C_1 + nC_2) + 3^n C_3.$$

On ne demande pas de calculer explicitement ces trois colonnes.

- 5.c. En déduire qu'il existe trois réels α , β et γ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n (\alpha + n\beta) + 3^n \gamma.$$

❖ IV – Problème ❖

On considère la fonction f définie sur l'intervalle

$$I =]-\infty, 1[$$

par

$$f(0) = -1 \text{ et } \forall t \neq 0, f(t) = \frac{\ln(1-t)}{t}.$$

1. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$, puis que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

On considère la fonction F définie par

$$\forall x \in]-\infty, 1[, F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 2.a. Expliquer pourquoi la fonction F est bien définie sur l'intervalle I et préciser le lien qui existe entre f et F .
- 2.b. Étudier le sens de variation de F sur I .
- 2.c. Déterminer le signe de $F(x)$ pour $x < 1$.
3. Démontrer que

$$\forall x \in]0, 1[, F(x) = \int_{1-x}^1 f(1-u) du.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in]0, 1[$, on pose

$$I_k(x) = \int_{1-x}^1 u^k \ln u du.$$

- 4.a. Démontrer que

$$F(x) = \sum_{k=0}^n I_k(x) + \int_{1-x}^1 u^{n+1} f(1-u) du$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1[$.

- 4.b. Démontrer que

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n I_k(x) \right| = \int_0^x |f(t)|(1-t)^{n+1} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1[$.

- 4.c. Soit $x \in]0, 1[$ (fixé). Démontrer que la fonction $|f|$ est majorée par une constante M_x sur $[0, x]$:

$$\exists M_x > 0, \forall t \in [0, x], |f(t)| \leq M_x$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n I_k(x) \right| \leq \frac{M_x}{n+2}.$$

- 4.d. Démontrer que

$$\forall x \in]0, 1[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(x).$$

5. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que l'intégrale $I_n(x)$ est égale à

$$\frac{-(1-x)^{n+1} \ln(1-x)}{n+1} + \frac{(1-x)^{n+1} - 1}{(n+1)^2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, 1[$.

❖ V – Problème ❖

On note \cot la fonction *cotangente* définie par

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

1. Démontrer que la fonction \cot réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur \mathbb{R}_+^* .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} \cos^{2k} \theta \cdot \sin^{(2n+1)-2k} \theta.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique polynôme P_n à coefficients réels tel que

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad P_n(\cot^2 \theta) = \frac{\sin[(2n+1)\theta]}{\sin^{2n+1} \theta}.$$

4. Donner en fonction de n le degré de P_n , son coefficient dominant, la somme de ses racines ainsi que le produit de ses racines.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n possède n racines réelles strictement positives distinctes.

6. a. Démontrer que

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad \cot^2 \theta \leq \frac{1}{\theta^2} \leq 1 + \cot^2 \theta.$$

6. b. En déduire que

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\pi^2(2n-1)n}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2(2n-1)n}{3(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}.$$

et conclure.

Solution I ✿ Matrices d'adjacence

1. On applique la formule bien connue du produit matriciel, avec le décalage sur les indices imposé par l'énoncé :

$$\forall 0 \leq i, j < n, \quad c_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i,k} b_{k,j}.$$

```
def produit(A, B):
    M = []
    n = len(A)
    for i in range(n):
        Ligne = []
        for j in range(n):
            c = 0
            for k in range(n):
                c += A[i][k]*B[k][j]
            Ligne.append(c)
        M.append(Ligne)
    return M
```

2. Un graphe est orienté si, et seulement si, sa matrice d'adjacence n'est pas symétrique. Il suffit de comparer deux à deux les coefficients situés hors de la diagonale pour pouvoir conclure.

```
def oriente(A):
    n = len(A)
    sym = True
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            sym = sym and A[i][j]==A[j][i]
    return not sym
```

3. Il existe au moins un chemin de longueur p du sommet i au sommet j si, et seulement si, le coefficient $A^p[i, j]$ est non nul.

On calcule successivement les puissances de la matrice A en utilisant la fonction `produit` définie plus haut :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = A \cdot A^k$$

tant que (boucle `while`) le coefficient cherché est nul.

```
def distance(A, i, j):
    B = A.copy()
    d = 1
    while B[i][j]==0:
        B = produit(A,B)
        d += 1
    return d
```

Solution II ✿ Algorithmes en Python

- Il y a 10^4 codes possibles (4 chiffres et 10 possibilités pour chaque chiffre).
- Tant qu'on n'a pas trouvé le résultat, on continue...

```
def deviner(code):
    echec = True
    k = 0
    while echec:
        n = input(invite)
        echec = (n != code)
        k += 1
    print(message.format(k))
```

Pour éviter de jouer trop longtemps aux devinettes en vérifiant le bon fonctionnement de cette fonction, on trichera en procédant comme suit.

```
code = creation()
print(code)
deviner(code)
```

3. Évidemment, il faut convertir les caractères en nombres entiers pour faire les calculs!

Il est préférable de définir une fonction dont l'unique tâche sera d'effectuer ces calculs.

```
def modifier(c):
    n = int(c)
    p = (n+5) % 10
    return str(p)

def crypte(code):
    liste_cryptee = [modifier(c) for c in code]
    return "".join(liste_cryptee)

# Variante moins pythonienne

def crypte(code):
    code_crypte = ""
    for c in code:
        code_crypte += modifier(c)
    return code_crypte
```

Solution III ✿ Puissances d'une matrice

1. Il est clair que

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$(A + I_3)^2 = 16 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Le rang de $(A + I_3)$ est égal à 2 et $C_1 + C_3 = 0$, donc

$$\text{Ker}(f + I_E) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1).$$

Le rang de $(A - 3I_3)$ est égal à 2 et $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc

$$\text{Ker}(f - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1).$$

Le rang de $(A + I_3)^2$ est égal à 1, donc le noyau de $(f + I_E)^2$ est un plan (Théorème du rang) et une équation de ce plan se lit sur les lignes de la matrice. Donc

$$\text{Ker}(f + I_E)^2 = [-x + y + z = 0].$$

2. Le vecteur $(1, 1, 1)$ dirige la droite $\text{Ker}(f - 3I_E)$; il ne vérifie pas l'équation cartésienne du plan $\text{Ker}(f + I_E)^2$; par conséquent, cette droite et ce plan sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$.

• Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et (x', y', z') , son projeté sur $\text{Ker}(f - 3I_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + I_E)^2$.

Comme $(x', y', z') \in \text{Ker}(f - 3I_E) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x', y', z') = (\alpha, \alpha, \alpha)$$

et comme

$$(x, y, z) - (x', y', z') \in \text{Ker}(f + I_E)^2 = [-X + Y + Z = 0]$$

il faut que

$$-(x - \alpha) + (y - \alpha) + (z - \alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = -x + y + z.$$

Par conséquent,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -x + y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

et finalement

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (Analyse) S'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ qui vérifie les propriétés de l'énoncé, alors il faut que

$$\begin{aligned} f(u_1) &= -u_1, && \text{(première colonne de } T) \\ f(u_2) &= -u_2 + u_1, && \text{(deuxième colonne de } T) \\ f(u_3) &= 3u_3. && \text{(troisième colonne de } T) \end{aligned}$$

Il faut donc que

$$u_1 \in \text{Ker}(f + I_E) \quad \text{et que} \quad u_3 \in \text{Ker}(f - 3I_E)$$

mais il faut aussi que

$$u_1 = (f + I_E)(u_2) \neq 0_E$$

et en particulier que

$$(f + I_E)^2(u_2) = (f + I_E)(u_1) = 0_E.$$

• (Synthèse) Choisissons par exemple

$$u_2 = (1, 1, 0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1, 1, 1).$$

D'après la question précédente, $u_3 \in \text{Ker}(f - 3I_E)$ et $(f + I_E)^2(u_2) = 0_E$. D'après l'analyse précédente, il faut poser

$$u_1 = (f + I_E)(u_2) = (1, 0, 1)$$

et on constate que ce vecteur appartient bien à la droite $\text{Ker}(f + I_E)$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est alors représentée dans la base canonique \mathcal{B}_0 par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que le rang de cette matrice est égal à 3. Par conséquent, la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est bien une base de $E = \mathbb{R}^3$.

Comme $u_1 \in \text{Ker}(f + I_E)$, que $u_1 = (f + I_E)(u_2)$ et que $u_3 \in \text{Ker}(f - 3I_E)$, on a bien

$$f(u_1) = -u_1, \quad f(u_2) = -u_2 + u_1, \quad f(u_3) = 3u_3.$$

Par conséquent, la matrice de f relative à cette nouvelle base \mathcal{B} est effectivement la matrice T .

4. La méthode est classique : on décompose $T = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $N^2 = 0_3$ et on vérifie sans peine que les deux matrices commutent :

$$DN = ND = -N.$$

On peut donc appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} T^n &= (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k N^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N \\ &= D^n + n(-1)^{n-1}N. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

5. a. Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = P T^n P^{-1} X_0$$

puisque $T = P^{-1}AP$ (formule du changement de base).

5. b. D'après ce qui précède,

$$T^n = (-1)^n \Pi_1 + (-1)^{n-1} n Q_1 + 3^n \Pi_2$$

avec

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit de l'expression précédente de X_n que

$$X_n = (-1)^n C_1 + n(-1)^n C_2 + 3^n C_3$$

avec

$$C_1 = P\Pi_1 P^{-1}X_0, \quad C_2 = -PQ_1 P^{-1}X_0, \quad C_3 = P\Pi_2 P^{-1}X_0.$$

Il est clair que C_1, C_2 et C_3 sont trois colonnes dont les coefficients sont indépendants de l'entier n .

5.c. Par définition,

$$u_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = E_1^T \cdot X_n.$$

D'après l'expression précédente,

$$u_n = (-1)^n \alpha + n(-1)^n \beta + 3^n \gamma$$

avec

$$\alpha = E_1^T \cdot C_1, \quad \beta = E_1^T \cdot C_2, \quad \gamma = E_1^T \cdot C_3.$$

Comme les colonnes C_1, C_2 et C_3 ne dépendent pas de n , les scalaires α, β et γ ne dépendent pas de n .

Solution IV * Étude de fonctions

1. La fonction (affine) $[t \mapsto 1 - t]$ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement positive sur $] -\infty, 1[$. Comme \ln est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , la composée

$$[t \mapsto \ln(1 - t)]$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$.

La fonction (affine) $[t \mapsto t]$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 1[$ et ne s'annule qu'en $t = 0$. Par quotient, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur chacun des deux sous-intervalles $] -\infty, 0[$ et $] 0, 1[$.

* Nous allons maintenant appliquer le Théorème de prolongement \mathcal{C}^1 .

Tout d'abord, pour t proche de 0 mais non nul,

$$f(t) = \frac{-t + o(t)}{t} = -1 + o(1)$$

donc $f(t)$ tend vers $-1 = f(0)$ lorsque t tend vers 0. La fonction f est donc continue sur l'intervalle I .

On a démontré précédemment que la fonction f était de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in I \setminus \{0\}$,

$$f'(t) = \frac{-1}{(1-t)t} - \frac{\ln(1-t)}{t^2}.$$

En particulier, pour t proche de 0 mais non nul,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{t} \cdot [1 + t + o(t)] + \frac{t + 1/2t^2 + o(t^2)}{t^2} \\ &= \frac{-1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ce développement limité prouve que la dérivée f' tend vers une limite finie (égale à $-1/2$) au voisinage de 0.

D'après le Théorème de prolongement \mathcal{C}^1 , la fonction f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I tout entier et en particulier

$$f'(0) = \frac{-1}{2}.$$

2.a. Comme f est continue sur l'intervalle I , alors f est continue sur le segment $[0 \leftrightarrow x]$ pour tout $x \in I$, donc l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

De plus, le Théorème fondamental du calcul intégral nous assure que la fonction F est alors une primitive de f (plus précisément : la primitive de f qui s'annule en $x = 0$).

2.b. Pour $t < 0$, le numérateur de f est strictement positif et le dénominateur est strictement négatif.

Pour $0 < t < 1$, le numérateur de f est strictement négatif et le dénominateur est strictement positif.

Comme $f(0) < 0$, la fonction f est donc strictement négative sur I . Comme f est la dérivée de F , on en déduit que F est strictement décroissante sur l'intervalle I .

2.c. Pour $x < 0$, les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre décroissant et la fonction intégrande f est strictement négative, donc $F(x) > 0$.

D'autre part, $F(0) = 0$.

Enfin, pour $0 < x < 1$, les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant et la fonction intégrande f est strictement négative, donc $F(x) < 0$.

3. Pour $x \in]0, 1[$, la fonction f est continue sur le segment $[0, x] \subset I$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = 1 - t$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_{1-x}^{1-0} f(1-u) du.$$

4.a. On n'intègre que des fonctions continues sur le segment $[1-x, 1]$. Toutes les intégrales sont donc bien définies et, par linéarité de l'intégrale, l'expression

$$\sum_{k=0}^n I_k(x) + \int_{1-x}^1 u^{n+1} f(1-u) du$$

est égale à

$$\int_{1-x}^1 \underbrace{\sum_{k=0}^n u^k \ln u + u^{n+1} f(1-u)}_{g(u)} du.$$

La fonction g ainsi définie est continue sur le segment $[1-x, 1]$ (car f est continue sur $[0, x]$).

Pour tout $u \in [1-x, 1[$ (intervalle semi-ouvert), on a $u \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1-u^{n+1}}{1-u} \ln u + u^{n+1} \frac{\ln u}{1-u} \\ &= \frac{\ln u}{1-u} = f(1-u) \end{aligned}$$

d'après la formule de la somme géométrique.

De plus, il est clair que $g(1) = 0 + f(0) = f(0)$ et par conséquent $g(u) = f(1-u)$ pour tout u appartenant au segment $[1-x, 1]$.

On en déduit finalement que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n I_k(x) + \int_{1-x}^1 u^{n+1} f(1-u) du &= \int_{1-x}^1 f(1-u) du \\ &= F(x). \end{aligned}$$

4. b. D'après ce qui précède et le changement de variable déjà effectué plus haut ($u = 1 - t$),

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n I_k(x) \right| &= \left| \int_{1-x}^1 u^{n+1} f(1-u) du \right| \\ &= \left| \int_0^x (1-t)^{n+1} f(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Comme $0 < x < 1$, les bornes sont dans l'ordre croissant ; le facteur $(1-t)^{n+1}$ est positif pour tout $t \in [0, x]$ et le facteur $f(t)$ est négatif pour tout $t \in [0, x]$ comme on l'a vu plus haut. L'intégrande étant de signe constant, on en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x (1-t)^{n+1} f(t) dt \right| &= \int_0^x |(1-t)^{n+1} f(t)| dt \\ &= \int_0^x (1-t)^{n+1} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

4. c. Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.

• La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1[$. Comme $0 < x < 1$, cette fonction est donc continue sur le segment $[0, x] \subset]-\infty, 1[$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée : il existe donc une constante M_x (qui dépend a priori de la valeur de x fixée) telle que

$$\forall t \in [0, x], \quad |f(t)| \leq M_x.$$

• On en déduit que

$$\forall t \in [0, x], \quad (1-t)^{n+1} |f(t)| \leq M_x (1-t)^{n+1}$$

et par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^x (1-t)^{n+1} |f(t)| dt \leq M_x \int_0^x (1-t)^{n+1} dt.$$

Or, pour $0 < x < 1$,

$$\int_0^x (1-t)^{n+1} dt = \frac{1 - (1-x)^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2},$$

donc, d'après la relation établie à la question précédente,

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^n I_k(x) \right| \leq \frac{M_x}{n+2}.$$

4. d. Soit $x \in]0, 1[$.

Le réel x étant fixé dans $]0, 1[$, le majorant M_x est indépendant de n . Le Théorème d'encadrement, appliqué à l'encadrement qui vient d'être établi, prouve que la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=0}^n I_k(x)$$

converge vers $F(x)$. Autrement dit, la série $\sum I_k(x)$ converge et

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(x).$$

5. La fonction \ln et les fonctions polynomiales sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment

$$[1-x, 1] \subset]0, +\infty[$$

(puisque $0 < x < 1$), donc l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \left[\frac{u^{n+2}}{n+2} \ln u \right]_{1-x}^1 - \int_{1-x}^1 \frac{u^{n+1}}{n+2} du \\ &= \frac{-(1-x)^{n+2} \ln(1-x)}{n+2} - \frac{1 - (1-x)^{n+2}}{(n+2)^2} \end{aligned}$$

Solution V * Une série célèbre

1. La fonction \cot est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, \pi/2[$ (en tant que quotient de fonctions dérivables) et sur cet intervalle,

$$\cot'(x) = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0.$$

Elle tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0 et vers 0 au voisinage de $\pi/2$. Par conséquent, la fonction \cot réalise une bijection (strictement décroissante) de $]0, \pi/2[$ sur $]0, 1[$.

2. Pour tout entier naturel n et pour tout réel θ ,

$$\sin(2n+1)\theta = \Im(e^{i(2n+1)\theta}) = \Im((\cos \theta + i \sin \theta)^{2n+1}).$$

D'après la formule du binôme et en scindant la somme obtenue en deux parties selon la parité de l'indice,

$$\begin{aligned} e^{i(2n+1)\theta} &= \sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p} \cos^p \theta \cdot \sin^{(2n+1)-p} \theta \cdot i^{2n-p} \\ &= i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} \cos^{2k} \theta \cdot \sin^{(2n+1)-2k} \theta \quad (\text{p pairs}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^{n-k} \cos^{2k+1} \theta \cdot \sin^{2(n-k)} \theta. \quad (\text{p impairs}) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2n + 1)\theta = \sum_{k=0}^n \binom{2n + 1}{2k} (-1)^{n-k} \cos^{2k} \theta \cdot \sin^{(2n+1)-2k} \theta.$$

3. Soient P_n et R_n , deux polynômes tels que

$$\forall \theta \in]0, \pi/2[, \quad P_n(\cot^2 \theta) = R_n(\cot^2 \theta).$$

D'après 1., pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $0 < \theta < \pi/2$ tel que $x = \cot^2 \theta$, donc P_n et R_n coïncident sur \mathbb{R}_+^* . Comme \mathbb{R}_+^* est un ensemble infini, on en déduit que $P_n = R_n$. Il existe donc au plus un polynôme vérifiant la propriété voulue.

Lorsque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on divise l'identité du 2. par $\sin^{2n+1} \theta$ (qui est strictement positif¹) et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n + 1)\theta}{\sin^{2n+1} \theta} &= \sum_{k=0}^n \binom{2n + 1}{2k} (-1)^{n-k} \frac{\cos^{2k} \theta}{\sin^{2k} \theta} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n + 1}{2k} (-1)^{n-k} (\cot^2 \theta)^k. \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n + 1}{2k} (-1)^{n-k} X^k \tag{*}$$

répond à la question.

4. D'après (*), le degré du polynôme P_n est égal à n , son coefficient dominant à $\binom{2n+1}{2n} = 2n + 1$. La somme de ses racines se déduit du coefficient de degré $n - 1$ et vaut

$$-\frac{(-1)}{2n + 1} \binom{2n + 1}{2(n - 1)} = \frac{1}{2n + 1} \binom{2n + 1}{3} = \frac{(2n + 1)(2n)(2n - 1)}{1.2.3.(2n + 1)} = \frac{n(2n - 1)}{3}.$$

Le produit des racines se déduit du coefficient constant et vaut

$$(-1)^n \frac{(-1)^n}{2n + 1} \binom{2n + 1}{0} = \frac{1}{2n + 1}.$$

REMARQUE.— Il faut savoir retrouver la somme et le produit des racines d'un polynôme à la simple lecture de ses coefficients :

$$a \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) = aX^n + \left[-a \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \right] X^{n-1} + \dots + \left[a(-1)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \right].$$

5. Il est clair d'après 1. que \cot^2 réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur \mathbb{R}_+^* .

ANALYSE.— Soit z , une racine strictement positive de P_n . Il existe alors $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tel que $z = \cot^2 \theta$ et donc tel que $P_n(\cot^2 \theta) = 0$. Alors $\sin(2n + 1)\theta = 0$ d'après 3., donc $(2n + 1)\theta$ est nécessairement un multiple entier de π .

SYNTHÈSE.— Pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on pose

$$\theta_k = \frac{k\pi}{2n + 1}.$$

Tous ces nombres appartiennent à l'intervalle ouvert $]0, \pi/2[$ et $\sin[(2n + 1)\theta_k] = 0$ quel que soit $1 \leq k \leq n$. D'après 3., les nombres réels $\cot^2 \theta_k$, $1 \leq k \leq n$, sont donc des racines strictement positives du polynôme P_n .

Comme \cot^2 est injective sur $]0, \pi/2[$, les n réels $\cot^2 \theta_k$, $1 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts.

REMARQUE.— Comme $\deg P_n = n$, on sait que P_n possède au plus n racines distinctes dans \mathbb{C} . Par conséquent, les réels $\cot^2 \theta_k$, $1 \leq k \leq n$, sont les racines de P_n .

6. a. L'étude des variations de \sin et de \tan montre que $\tan \theta > \theta > \sin \theta > 0$ pour tout $0 < \theta < \pi/2$. Par conséquent,

$$\forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \cot^2 \theta = \frac{1}{\tan^2 \theta} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta.$$

REMARQUE.— On peut aussi établir ces inégalités à l'aide de la formule des accroissements finis.

1. On ne divise pas par zéro, c'est mal.

6. b. On applique l'encadrement précédent à chacun des θ_k définis à la question 5. et on somme ces encadrements. Comme la somme des $\cot^2 \theta_k$ a été calculée en 4. (c'est la somme des racines de P_n), on en déduit que

$$\frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^n \cot^2 \theta_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\theta_k^2} \leq n + \sum_{k=1}^n \cot^2 \theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

D'après l'expression des θ_k (question 5.), on en déduit que

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left[n + \frac{n(2n-1)}{3} \right]$$

pour tout entier naturel $n \geq 1$. Les termes extrêmes de cet encadrement tendent tous deux vers $\pi^2/6$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$