Question 1.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a, la fonction $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$ (fonction de Heavyside).

❧ On travaille donc dans l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

❧ D'après le cours **[6.2]**, la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre si, et seulement si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, toute sous-famille de n fonctions

$$(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$$

est libre.

❧ Fixons donc un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et choisissons n réels quelconques :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

Partons d'une relation de liaison entre les fonctions f_{a_k} : supposons qu'il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0_{\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_k f_{a_k} = \sum_{\substack{1\leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k}} (-\lambda_\ell) f_{a_\ell}. \tag{$\star$}$$

Chaque fonction f_{a_i} est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$ et discontinue au point a_i (la limite à gauche en a_i est nulle alors que la limite à droite en a_i est égale à 1).

Le second membre de l'égalité ($\star$) est donc une fonction continue au point a_k, en tant que combinaison linéaire de fonctions qui sont toutes continues en a_k (la fonction f_{a_ℓ} est discontinue en a_ℓ, donc elle est continue en $a_k \neq a_\ell$).

Le premier membre de ($\star$) est donc une fonction continue au point a_k également. Comme f_{a_k} n'est pas continue en a_k, la seule possibilité est donc que $\lambda_k = 0$.

On a ainsi démontré que la sous-famille $(f_{a_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ était libre.

Cela vaut pour toute sous-famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ (quel que soit le nombre d'éléments de cette famille), donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Question 2

On utilise la même méthode en considérant cette fois les fonctions définies par

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = |t - a|.$$

Comme précédemment, on arrive à la relation ($\star$).

Cette fois, chaque fonction f_{a_i} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en $t = a_i$. Le second membre de ($\star$) est donc dérivable au point $t = a_k$ (en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables en ce point). Par conséquent, le premier membre de ($\star$) est lui aussi dérivable en $t = a_k$ et comme la fonction f_{a_k} n'est pas dérivable en ce point, il faut que $\lambda_k = 0$.

On conclut comme plus haut.

Question 3.a

On commence toujours de la même manière, en considérant les fonctions définies par

$$\forall\, a \in \mathbb{C},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \exp(at)$$

et on arrive une nouvelle fois à la relation

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}(t) = 0. \tag{$\dagger$}$$

Comme les fonctions f_{a_k} sont indéfiniment dérivables, on peut dériver cette relation :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^p \exp(a_k t) = 0$$

et comme ces relations sont établies pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut par exemple choisir $t = 0$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^p \lambda_k = 0.$$

(L'équation pour $p = 0$ découle de (†) avec $t = 0$.)

On reconnaît ici un système homogène de Vandermonde associé aux scalaires $a_1, \dots, a_n$ qui sont <u>deux à deux distincts</u>. Il s'agit donc d'un système de Cramer et son unique solution est donc connue :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On conclut une nouvelle fois de la même manière.

Question 3.b

On commence toujours de la même manière, en considérant les fonctions définies par

$$\forall\, a \in \mathbb{C},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \cos at$$

et on arrive une nouvelle fois à la relation (†) où les a_k sont des réels positifs deux à deux distincts.

Les fonctions f_a sont encore indéfiniment dérivables mais il faut dériver un nombre pair de fois pour obtenir une relation exploitable :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}^{(2p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (-1)^p a_k^{2p} \cos a_k t$$

et on conclut comme plus haut en évaluant en $t = 0$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} (-a_k^2)^p \lambda_k = 0.$$

Il s'agit à nouveau d'un système homogène de Vandermonde, associé aux scalaires $-a_1^2, \dots, -a_n^2$ qui sont deux à deux distincts (puisque les a_k sont des réels *positifs* deux à deux distincts).

Question 3.c

On considère cette fois des fonctions dont la variable est notée n — autrement dit, nos vecteurs sont ici des <u>suites</u> : nous allons travailler dans l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles et, pour tout $q \in \mathbb{R}$, nous noterons g_q, la suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

Bien entendu, la méthode est toujours la même : on considère une famille finie de paramètres q_k deux à deux distincts. On choisit donc un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des réels $q_1, q_2, \dots, q_N$ deux à deux distincts et tels que

$$|q_1| \leqslant |q_2| \leqslant \cdots \leqslant |q_N|.$$

✍ *Comme les q_k sont deux à deux distincts, si $|q_k| = |q_{k+1}|$, alors il faut que $q_k = -q_{k+1}$.*

Dans cette succession d'inégalités larges, il ne peut pas y avoir deux égalités consécutives.

Si on se restreignait aux paramètres $q \in \mathbb{R}_+$ (au lieu de $q \in \mathbb{R}$), on pourrait supposer que $0 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots < q_N$.

On suppose <u>comme d'habitude</u> qu'il existe des scalaires (réels) $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tels que

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k g_{q_k} = 0_E$$

(où le second membre désigne la suite nulle), c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0 \tag{‡}$$

et, comme toujours, nous cherchons à démontrer que tous les réels λ_k sont nuls.

Première méthode - par récurrence

Initialisation. Si $N = 1$, la relation (‡) se réduit à

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1 q_1^n = 0.$$

En particulier, pour $n = 0$, il reste $\lambda_1 = 0$.

HR. On suppose qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ pour lequel la propriété (‡) implique que les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ soient tous nuls.

Hérédité. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k q_k^n = 0. \tag{$\clubsuit$}$$

On sait que $0 \leqslant |q_1| \leqslant \cdots \leqslant |q_{N+1}|$ et que les q_k sont deux à deux distincts. Comme $N \geqslant 1$, on a $N \geqslant 2$, donc :

— si $q_1 = 0$, alors $q_{N+1} \neq 0$ et $|q_{N+1}| > 0$;

— si $q_1 \neq 0$, alors $|q_{N+1}| \geqslant |q_1| > 0$.

On peut donc diviser la somme par un terme prépondérant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left[\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{q_k}{q_{N+1}}\right)^n\right] + \lambda_{N+1} = 0. \tag{$\spadesuit$}$$

— Premier cas. — Si $|q_N| < |q_{N+1}|$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \left|\frac{q_k}{q_{N+1}}\right| < 1$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_k \left(\frac{q_k}{q_{N+1}}\right)^n = 0.$$

On déduit alors de ($\spadesuit$) que $\lambda_{N+1} = 0$ (en faisant tendre n vers $+\infty$), puis de ($\clubsuit$) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0,$$

ce qui permet de conclure en invoquant l'Hypothèse de récurrence.

— Deuxième cas. — Si $|q_N| = |q_{N+1}|$, alors $q_{N+1} = -q_N$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k < N, \quad |q_k| < |q_N|.$$

✍ *On ne peut plus passer à la limite dans ($\spadesuit$) puis qu'on vient de faire apparaître la suite de terme général $(-1)^n$, qui est divergente.*

Qu'à cela ne tienne, nous allons recourir aux ordres de grandeur !

Lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de ($\spadesuit$) que

$$\lambda_{N+1} + (-1)^n \lambda_N + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} 0.$$

On en déduit que

$$\lambda_{N+1} + \lambda_N = \lambda_{N+1} - \lambda_N = 0$$

et donc que $\lambda_{N+1} = \lambda_N$.

✍ *On fait tendre n vers $+\infty$ en se restreignant d'abord aux valeurs paires de n, puis aux valeurs impaires de n.*

On ne peut pas passer à la limite quand une suite diverge. Mais s'il existe des suites extraites convergentes, on peut passer à la limite sur ces suites extraites.

Comme dans le premier cas, on déduit alors de ($\clubsuit$) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0,$$

ce qui permet encore de conclure en invoquant l'Hypothèse de récurrence.

✍ *Attention à ne pas rater la dernière marche ! Le raisonnement sur les ordres de grandeur pourrait nous inciter à écrire que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k q_k^n = 0$$

(puisque λ_N et λ_{N+1} sont nuls), mais nous ne pourrions pas appliquer notre hypothèse de récurrence...

On pourrait s'en tirer au moyen d'une hypothèse de récurrence forte — mais j'ai préféré "oublier" l'information $\lambda_N = 0$.

Autre méthode

✍ *Nous allons raisonner par l'absurde, ce qui nous évitera de raisonner par récurrence.*

Nous repartons de (‡) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0$$

toujours en supposant que

$$|q_1| \leqslant |q_2| \leqslant \cdots \leqslant |q_N|$$

et en supposant en outre qu'il existe au moins un indice $1 \leqslant k \leqslant N$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

✍ *On suppose donc que la famille $(g_{q_k})_{1\leqslant k\leqslant N}$ est une famille liée et nous cherchons à en déduire une contradiction.*

D'après notre hypothèse, l'ensemble

$$\Omega = \{1 \leqslant k \leqslant N \ : \ \lambda_k \neq 0\}$$

est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, donc l'ensemble Ω admet un plus grand élément que nous noterons m.

Par définition du plus grand élément, $m \in \Omega$ et $k \notin \Omega$ pour tout $m < k \leqslant N$, donc

$$\lambda_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_N = 0$$

ce qui permet de simplifier la relation (‡) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k^n = 0.$$

Premier cas. Si $q_m = 0$, alors $m = 1$ et pour $n = 0$, il reste $\lambda_1 = \lambda_m = 0$, ce qui contredit la définition de l'indice m.

Deuxième cas. Si $|q_m| > |q_{m-1}|$, alors on peut diviser par q_m :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \left(\frac{q_k}{q_m}\right)^n + \lambda_m = 0$$

et comme $|{}^{q_k}/_{q_m}| < 1$ pour tout $1 \leqslant k < m$, on peut faire tendre n vers $+\infty$: il reste $\lambda_m = 0$, ce qui contredit la définition de l'indice m.

Troisième cas. Si $|q_m| = |q_{m-1}|$, alors on peut diviser par q_m :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{m-2} \lambda_k \left(\frac{q_k}{q_m}\right)^n + \lambda_{m-1}(-1)^n + \lambda_m = 0.$$

On en déduit que

$$\lambda_{m-1}(-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\lambda_m$$

(puisque tous les quotients sont *strictement* inférieurs à 1 en module). Comme la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente, on en déduit que $\lambda_{m-1} = 0$ et donc que $\lambda_m = 0$. Dans ce dernier cas aussi, la définition de l'indice m est contredite.

Conclusion. En supposant que l'ensemble Ω n'était pas vide, nous sommes arrivés à une contradiction. On en déduit que $\Omega = \varnothing$, donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \lambda_k = 0$$

et donc que toute sous-famille finie de la famille $(g_q)_{q\in\mathbb{R}}$ des suites géométriques est libre.