❧ **[60.1]**

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ admet 0 et 1 pour racine si, et seulement si, il est divisible par $X(X-1)$. L'ensemble de ces polynômes est donc le sous-espace vectoriel

$$F = \{X(X-1)Q, \ Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Comme le polynôme $X(X-1)$ n'est pas le polynôme nul, on peut diviser n'importe quel polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X(X-1)$: il existe donc un unique couple (Q, R) de polynômes tels que

$$P = X(X-1)Q + R$$

avec $\deg R < 2$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}_1[X]$.

On a ainsi démontré que

$$\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_1[X]$$

et en particulier que la codimension de F est égale à $\dim \mathbb{K}_1[X] = 2$.

❧ **[60.2]**

Comme la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (!), le cours nous dit que

$$\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(X^{2p}, \ p \in \mathbb{N}) \oplus \mathrm{Vect}(X^{2p+1}, \ p \in \mathbb{N}).$$

On connaît donc un supplémentaire de $\mathbb{K}[X^2] = \mathrm{Vect}(X^{2p}, \ p \in \mathbb{N})$ et ce supplémentaire est un sous-espace de dimension infinie.

Donc le sous-espace $\mathbb{K}[X^2]$ des polynômes pairs n'est pas un sous-espace de codimension finie.

❧ **[60.3]**

Toute suite réelle convergente possède une, et une seule, limite réelle (par définition !). Il existe donc une application $L : c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{R}), \qquad L(u) = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Par linéarité de la limite, cette application L est une forme linéaire sur $c(\mathbb{R})$ et le sous-espace $c_0(\mathbb{R})$ des suites réelles de limite nulle est le noyau de cette forme linéaire L.

La forme linéaire L n'est pas identiquement nulle (la limite de la suite constante égale à 1 n'est pas nulle), donc $c_0(\mathbb{R})$ est un hyperplan, c'est-à-dire un sous-espace de codimension 1.

❧ L'Astuce taupinale nous donne une décomposition simple d'une suite convergente comme somme d'une suite constante et d'une suite de limite nulle.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = L(u) + \big(u_n - L(u)\big)$$

La droite vectorielle des suites constantes est donc un supplémentaire de l'hyperplan des suites de limite nulle dans l'espace des suites convergentes.

Bien évidemment, ce n'est pas le seul supplémentaire possible, mais il est clair que c'est le plus simple de tous les supplémentaires possibles !

❧ **[60.4]**

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note g_k, la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui diverge vers $+\infty$).

Supposons que le sous-espace $c(\mathbb{R})$ des suites réelles convergentes admette un supplémentaire G et notons p (resp. q), la projection sur $c(\mathbb{R})$ parallèlement à G (resp. sur G parallèlement à $c(\mathbb{R})$).

Comme les suites g_k sont d'ordres de grandeur différents et que toute suite convergente est bornée, la famille $\big(q(g_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est *libre. (À vérifier ! C'est déjà un exercice un peu compliqué !)*

Le sous-espace G contient donc une famille libre de cardinal infini, donc c'est un espace de dimension infinie.

Par conséquent, l'espace des suites convergentes n'est pas un sous-espace de codimension finie dans l'espace $\ell^0(\mathbb{R})$ des suites réelles.