❧ L'indice $i \in I$ est fixé.

❧ Soit $x \in E$. Par hypothèse, il existe une famille $(x_j)_{j\in I}$ de vecteurs tels que

$$\forall\, j \in I, \quad x_j \in E_j \quad \text{et} \quad x = \sum_{j\in I} x_j.$$

En isolant le terme d'indice i, on en déduit que

$$x = \underbrace{x_i}_{\in E_i} + \underbrace{\sum_{j\neq i} x_j}_{\in F_i}$$

par définition du sous-espace F_i.

On a ainsi démontré que $E \subset E_i + F_i$ et en fait que $E = E_i + F_i$ (puisque l'inclusion réciproque est évidente).

❧ Pour démontrer que la somme $E_i + F_i$ est directe, considérons deux vecteurs $x_i \in E_i$ et $y_i \in F_i$ tels que

$$x_i + y_i = 0_E.$$

Par définition de F_i, il existe une famille $(x_j)_{j\neq i}$ de vecteurs tels que

$$\forall\, j \neq i, \quad x_j \in E_j \quad \text{et} \quad y_i = \sum_{j\neq i} x_j.$$

On obtient ainsi

$$\sum_{j\in I} x_j = 0_E$$

où $x_j \in E_j$ pour tout $j \in I$ (que l'indice j soit différent de i ou égal à i).

Comme les sous-espaces vectoriels $(E_j)_{j\in I}$ sont en somme directe, on en déduit que

$$\forall j \in I, \qquad x_j = 0_E$$

et en particulier que $x_i = y_i = 0_E$. CQFD

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, i \in I, \quad E = E_i \oplus F_i.$$