RMS 2004 [309]

Soit E, un espace euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

1❧ *Démontrer que l'application définie par*

$$\forall\, f, g \in L(E), \quad \varphi(f,g) = \operatorname{tr}(f^* \circ g)$$

est un produit scalaire sur $L(E)$.

2❧ *Soit $f \in L(E)$. On suppose que $f^* \circ f = f \circ f$. Démontrer que f est auto-adjoint.*

1❧ Quels que soient les endomorphismes f et g, la composée $f^* \circ g$ est un endomorphisme de E et sa trace est un réel. Donc l'application φ est bien une application de $L(E) \times L(E)$ dans $\mathbb{R}$.

❧ La trace est linéaire sur $L(E)$; la composition des endomorphismes de E est bilinéaire ; le passage à l'adjoint $[u \mapsto u^*]$ est linéaire. Par conséquent, l'application φ est bilinéaire.

❧ Un endomorphisme et son adjoint ont même trace. Par conséquent,

$$\varphi(f,g) = \operatorname{tr}\big((f^* \circ g)^*\big) = \operatorname{tr}(g^* \circ f) = \varphi(g,f).$$

Ainsi, φ est symétrique.

❧ Quel que soit l'endomorphisme f de E, la composée $f^* \circ f$ est un endomorphisme symétrique :

$$(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$$

et positif : pour tout $x \in E$,

$$\big\langle x \,\big|\, (f^* \circ f)(x) \big\rangle = \big\langle f(x) \,\big|\, f(x) \big\rangle = \big\|f(x)\big\|^2 \geqslant 0.$$

Par conséquent, l'endomorphisme $f^* \circ f$ est diagonalisable (donc sa trace est la somme de ses valeurs propres) et ses valeurs propres sont des réels positifs, donc sa trace est un réel positif.

❧ Si $\varphi(f,f) = 0$, le raisonnement précédent prouve que l'endomorphisme $f^* \circ f$ est diagonalisable et que sa seule valeur propre est le réel 0. Par conséquent, $f^* \circ f = \omega_E$. On en déduit comme plus haut que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|f(x)\big\|^2 = 0$$

et donc que $f = \omega_E$.

❧ L'application φ est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $L(E)$, c'est donc bien un produit scalaire sur E.

✍ *Évidemment, si f est un automorphisme, on obtient directement $f^* = f$ en simplifiant par f.*

Mais c'est tellement simple que ça ne nous donne aucune indication pour traiter le cas où f n'est plus inversible !

Utilisons plutôt la première question en nous souvenant d'un résultat essentiel : dans un espace vectoriel normé, un vecteur est nul si, et seulement si, sa norme est nulle.

Nous allons donc nous intéresser à $\|f^* - f\|$ — ou plutôt à $\|f^* - f\|^2$ puisqu'il s'agit d'une norme euclidienne —, étant bien entendu que cette fois, il s'agit de la norme associée au produit scalaire φ sur $L(E)$ et non plus de la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur E.

2❧ En passant à l'adjoint, l'hypothèse $f^* \circ f = f \circ f$ nous donne aussi

$$f^* \circ f = f^* \circ f^*.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|f - f^*\|^2 &= \operatorname{tr}\big[(f - f^*)^* \circ (f - f^*)\big] \\
&= \operatorname{tr}\big[(f^* - f) \circ (f - f^*)\big] \\
&= \operatorname{tr}(-f \circ f + f^* \circ f + f \circ f^* - f^* \circ f^*) \\
&= \operatorname{tr}(f \circ f^* - f^* \circ f) = \operatorname{tr}(f \circ f^*) - \operatorname{tr}(f^* \circ f).
\end{aligned}$$

On sait que

$$\forall\, u, v \in L(E), \quad \operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u),$$

donc

$$\|f - f^*\|^2 = 0$$

et par conséquent f est auto-adjoint : $f = f^*$.