> *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions convexes sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction g.*
>
> **1❧** *Que dire de la fonction g ?*
>
> **2❧** *Soit $[\alpha,\beta]\subset\,]a,b[$.*
> *Démontrer qu'il existe un réel $K>0$ tel que*
>
> $$\forall\,n\in\mathbb{N},\ \forall\,x,y\in[\alpha,\beta],\quad \big|g_n(x)-g_n(y)\big|\leqslant K|x-y|.$$
>
> *En déduire que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$.*

1❧ La convexité, propriété ponctuelle, est conservée par convergence simple. Et comme la fonction g est donc convexe sur le segment $[a,b]$.

✍ *Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est toujours continue. En revanche, une fonction convexe sur un segment n'est pas toujours continue : elle peut présenter une discontinuité à chaque extrémité du segment.*

2❧ Considérons une fonction f convexe sur le segment $[a,b]$ et

$$a<\alpha\leqslant x<y\leqslant\beta<b.$$

Une application répétée du Théorème des trois pentes nous donne

$$\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(b)-f(\beta)}{b-\beta}.$$

On en déduit que

$$\forall\,x,y\in[\alpha,\beta],\quad \big|f(x)-f(y)\big|\leqslant K|x-y|$$

en posant

$$K=\max\left\{\left|\frac{f(b)-f(\beta)}{b-\beta}\right|,\ \left|\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}\right|\right\}.$$

✍ *Nous venons de démontrer qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est en fait lipschitzienne sur chaque segment contenu dans cet intervalle ouvert.*

Il n'y a aucune raison pour qu'elle soit lipschitzienne sur l'intervalle ouvert, comme le montre la fonction $-\sqrt{\cdot}$, qui est convexe sur $]0,+\infty[$ sans être lipschitzienne sur cet intervalle.

❧ On peut appliquer ce qui précède à toutes les fonctions g_n avec

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad K_n=\max\left\{\left|\frac{g_n(b)-g_n(\beta)}{b-\beta}\right|,\ \left|\frac{g_n(\alpha)-g_n(a)}{\alpha-a}\right|\right\}.$$

Comme la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$, on en déduit que les suites de termes généraux

$$\left|\frac{g_n(b)-g_n(\beta)}{b-\beta}\right|\quad\text{et}\quad\left|\frac{g_n(\alpha)-g_n(a)}{\alpha-a}\right|$$

sont toutes les deux convergentes. Par conséquent, elles sont bornées et il existe un réel $K>0$ tel que

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad K_n\leqslant K.$$

On a ainsi démontré que les fonctions g_n sont **uniformément lipschitziennes** sur tout segment $[\alpha,\beta]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a,b[$.

❧ Par convergence simple, on en déduit que

$$\forall\,x,y\in[\alpha,\beta],\quad \big|g(x)-g(y)\big|\leqslant K|x-y|.$$

❧ Le segment $[\alpha, \beta]$ étant fixé, on considère un réel $\varepsilon > 0$ et une subdivision

$$\alpha = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = \beta$$

telle que

$$\forall\, 0 \leqslant k < N, \quad |y_{k+1} - y_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant N$, la suite $\big(g_n(y_k)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(y_k)$ et comme ces suites sont en nombre FINI, on en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant N,\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad \big|g_n(y_k) - g(y_k)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons maintenant un réel $x \in [\alpha, \beta]$. Il existe au moins un entier $0 \leqslant k < N$ tel que $x \in [y_k, y_{k+1}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned}\big|g_n(x) - g(x)\big| &\leqslant \big|g_n(x) - g_n(y_k)\big| + \big|g_n(y_k) - g(y_k)\big| + \big|g(y_k) - g(x)\big| \\ &\leqslant 2K|x - y_k| + \big|g_n(y_k) - g(y_k)\big|.\end{aligned}$$

Comme $x \in [y_k, y_{k+1}]$, alors $|x - y_k| \leqslant y_{k+1} - y_k \leqslant \varepsilon/4K$. Si on se restreint aux indices $n \geqslant n_0$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \big|g_n(x) - g(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon 2 = \varepsilon.$$

L'indice n_0 étant indépendant du réel x choisi dans $[\alpha, \beta]$, on a bien démontré que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, x \in [\alpha, \beta], \quad \big|g_n(x) - g(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit : la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers la fonction g.

✍ *Complément à caractère culturel.*

L'existence d'une constante de Lipschitz ***commune*** *à la fonction g et aux fonctions g_n permet d'appliquer le Théorème d'Arzelà–Ascoli. En vertu de ce théorème, il existe une suite extraite $(g_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur le compact $[\alpha, \beta]$.*

Comme la convergence uniforme implique la convergence simple, c'est bien la fonction g qui est la limite de cette suite extraite convergente.

Comme on a supposé que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait simplement, on peut en déduire que la fonction g est en fait la seule valeur d'adhérence de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la convergence uniforme sur $[\alpha, \beta]$. De ce fait, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers g.

Les calculs que nous avons faits sont bien plus simples...