RMS 2004 [317]

> *Soient* $(E, \|\cdot\|)$, *un espace vectoriel normé et* V *et* W, *deux sous-espaces supplémentaires dans* E. *On suppose que* V *est de dimension finie.*
> *Démontrer que l'application* N *définie par*
>
> $$\forall\, x \in W, \quad N(x) = \inf_{v \in V} \|x + v\|$$
>
> *est une norme sur le sous-espace* W.

❧ Soit $x \in W$. L'ensemble

$$\big\{ \|x + v\|,\ v \in V \big\}$$

est une partie non vide (puisque V contient $v = 0_E$) et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne inférieure et cette borne inférieure est un réel positif.

Donc l'application N est bien définie de W dans $\mathbb{R}_+$.

❧ **(Homogénéité)**
Si $\lambda \neq 0$, alors l'application $[w \mapsto \lambda w]$ est une bijection de V dans V, donc

$$\begin{aligned}\big\{ \|\lambda x + v\|,\ v \in V \big\} &= \big\{ \|\lambda x + \lambda w\|,\ w \in V \big\} \\ &= |\lambda| \cdot \big\{ \|x + w\|,\ w \in V \big\}.\end{aligned}$$

Comme le facteur $|\lambda|$ est positif et indépendant du paramètre w, on en déduit que

$$\inf\big\{ \|\lambda x + v\|,\ v \in V \big\} = |\lambda| \inf\big\{ \|x + w\|,\ w \in V \big\}$$

et donc que

$$N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x).$$

Si $\lambda = 0$, il est clair que les deux membres de l'inégalité sont nuls et l'inégalité est donc encore vraie.

❧ **(Séparation des points)**
Supposons que $N(x) = 0$ pour un vecteur $x \in W$. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de V telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \|x + v_n\| = 0.$$

Cela signifie que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $-x$.

Comme W est un espace vectoriel et que $x \in W$, le vecteur $-x$ appartient à W.

Comme V est un espace vectoriel de dimension finie, c'est donc une partie fermée de E, donc le vecteur $-x$ appartient aussi à V.

Or V et W sont supplémentaires dans E, donc $x = 0_E$.

❧ **(Inégalité triangulaire)**
Quels que soient les vecteurs x et y dans W, u et v dans V,

$$\|x + y + v\| \leqslant \|x + u\| + \|y + (v - u)\|.$$

La borne inférieure étant un minorant, on en déduit que

$$\forall\, u, v \in V, \quad N(x + y) \leqslant \|x + u\| + \|y + (v - u)\|$$

et donc que

$$\forall\, u, v \in V, \quad N(x + y) - \|x + u\| \leqslant \|y + (v - u)\|.$$

Le minorant est indépendant de $v \in V$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$\forall\, u \in V, \quad N(x + y) - \|x + u\| \leqslant \inf_{v \in V} \|y + (v - u)\|.$$

Comme la translation $[v \mapsto v - u]$ est une bijection de V sur V, on en déduit que

$$\forall\, u \in V, \quad N(x + y) - \|x + u\| \leqslant N(y)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, u \in V, \quad N(x+y) - N(y) \leqslant \|x+u\|.$$

Cette fois encore, le minorant est indépendant du paramètre $u \in V$, donc on peut passer à la borne inférieure :

$$N(x+y) - N(y) \leqslant N(x).$$

❧ Conclusion : l'application N est bien une norme sur W.