RMS 2004 [8]

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie (non nulle) sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et V, un sous-espace de $L(E)$ tel que

$$V \setminus \{\omega_E\} \subset GL(E). \tag{$\star$}$$

1❧ *Démontrer que* $\dim V \leqslant \dim E$.

2❧ *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *démontrer que* $\dim V \leqslant 1$.

3❧ *La majoration précédente est-elle encore vraie pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *?*

1❧ Soit $n = \dim E$. Si $\dim V > n$, alors il existe une famille **libre**

$$(f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$$

dans V et comme $\dim E = n$, alors la famille

$$\big(f_1(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x)\big)$$

est **liée**, quel que soit le vecteur $x \in E$.

Choisissons un vecteur $x_0 \neq 0_E$ en particulier. Comme la famille

$$\big(f_1(x_0), \dots, f_n(x_0), f_{n+1}(x_0)\big)$$

est liée, il existe une famille de scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ non tous nuls telle que l'endomorphisme

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \cdot f_k \in V$$

ne soit pas injectif (son noyau contient le vecteur $x_0 \neq 0_E$) et n'est pas identiquement nul (puisque les scalaires α_k ne sont pas tous nuls et que la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est libre).

Cela contredit $(\star)$. Par conséquent, $\dim V \leqslant \dim E$.

2❧ On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si f et g sont deux vecteurs non nuls de V, ce sont deux automorphismes de E $(\star)$ et, en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel *complexe de dimension finie (non nulle)*, le spectre de la composée $f \circ g^{-1}$ n'est pas vide (son polynôme minimal, de degré $1 \leqslant d \leqslant n$, est scindé dans $\mathbb{C}[X]$).

Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'endomorphisme $f \circ g^{-1} - \lambda \cdot I_E$ ne soit pas injectif. Comme g est un automorphisme, on en déduit que l'endomorphisme

$$f - \lambda \cdot g = (f \circ g^{-1} - \lambda \, d I_E) \circ g$$

n'est pas injectif. Or $f - \lambda \cdot g \in V$ (puisque V est un espace vectoriel). Donc $f = \lambda \cdot g$ $(\star)$.

On a ainsi démontré que toute famille de deux vecteurs non nuls de V était liée. Par conséquent, $\dim V \leqslant 1$.

✍ *Il est clair que la droite vectorielle $V = \mathbb{C} \cdot f$ vérifie $(\star)$ quel que soit l'automorphisme f de E.*

Mais le sous-espace $V = \{\omega_E\}$ vérifie aussi $(\star)$!

Il existe donc des sous-espaces vectoriels V vérifiant $(\star)$ dont la dimension est nulle ou égale à 1 — et il n'y en a pas d'autres.

3❧ Avant de donner une démonstration rédigée, commençons pas présenter le chemin qui y mène.

✍ *Dans $\mathbb{R}[X]$, il existe des polynômes de degré 2 qui ne sont pas scindés et si le polynôme minimal d'un endomorphisme n'est pas scindé, alors le spectre de cet endomorphisme est vide.*

Les endomorphismes les plus simples dont le spectre soit vide sont les rotations d'angle θ tel que $\sin \theta \neq 0$.

Avec les précautions évidentes,

$$\alpha\cdot f+\beta\cdot g=\Big((f\circ g^{-1})-\frac{-\beta}{\alpha}\cdot I_E\Big)\circ(\alpha\cdot g).$$

Si on choisit f et g de telle sorte que le spectre de $f\circ g^{-1}$ soit vide, la combinaison linéaire $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ sera tantôt un automorphisme, tantôt l'application nulle.

Considérons l'espace $E=\mathbb{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique, et les deux endomorphismes f et g représentés respectivement dans la base canonique par les matrices

$$I_2 \quad \text{et} \quad R(\pi/2)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Il est clair que l'espace $V=\mathrm{Vect}(f,g)$ est un sous-espace vectoriel.

Si le couple (α,β) est égal au couple $(0,0)$, alors $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ est évidemment le vecteur nul de V.

Sinon, le réel

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

est strictement positif et comme

$$\Big(\frac{\alpha}{r}\Big)^2+\Big(\frac{\beta}{r}\Big)^2=1,$$

il existe un réel θ tel que

$$\cos\theta=\frac{\alpha}{r},\qquad \sin\theta=\frac{\beta}{r}.$$

On en déduit alors que la matrice relative à la base canonique de $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ est égale à

$$r\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible, donc $\alpha\cdot f+\beta\cdot g\in GL(E)$.

On a ainsi démontré qu'il existait un espace E et un sous-espace V de $L(E)$ tels que

$$1<\dim V=\dim E.$$

✍ *Le sous-espace V, engendré par l'identité et un quart de tour, est le sous-espace des **similitudes directes du plan**. La factorisation de la matrice décrit une similitude directe comme la composée d'une homothétie de rapport $r\geqslant 0$ et d'une rotation d'angle θ.*

On doit y voir une interprétation géométrique du corps $\mathbb{C}$.

- *En tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ est engendré par 1 et par i.*
- *Chaque complexe non nul peut se factoriser sous forme polaire.*

$$z_0=|z|\cdot e^{i\theta}$$

- *Chaque similitude directe du plan correspond à un nombre complexe non nul :*

$$\forall\, z\in\mathbb{C},\quad f(z)=z_0\cdot z.$$

NB : il n'est question ici que des similitudes vectorielles ! Avec les complexes, les similitudes affines *s'expriment*

$$[z\mapsto az+b]$$

avec $a\in\mathbb{C}^*$ (homothétie et rotation) et $b\in\mathbb{C}$ (translation, qui fait que l'origine n'est pas un point fixe).