❧ Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$u_k = \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série *convergente* de terme général *positif*, donc la série $\sum u_k$ est (absolument) convergente et d'après le théorème de sommation des équivalents **[92.3]**,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. (L'équivalent classique du reste de la série de Riemann a été calculé au **[81.2]**.)

Par conséquent, en notant U, la somme de la série $\sum u_k$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = U - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = U - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Comparer la somme à une intégrale est toujours une bonne idée, mais l'intégrale qu'on obtient ici n'est pas très agréable...

Complément

Un usage futé des séries télescopiques permet d'obtenir une meilleure précision sur l'ordre de grandeur du reste de la série.

❧ La série télescopique de terme général

$$\delta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2, \quad \delta_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

est convergente et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, la somme de cette série est *nulle* et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta_k = \frac{-1}{n}.$$

❧ Les calculs précédents ont montré que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tendait vers $+\infty$. On va donc poser

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad v_k = u_k + \delta_k.$$

En tant que somme de deux séries convergentes, la série $\sum v_k$ est convergente et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta_k = R_n + \frac{-1}{n}.$$

Or, pour tout $k \geqslant 2$,

$$v_k = \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

et, lorsque k tend vers $+\infty$,

$$v_k \sim \frac{-1}{k^3}$$

(à vérifier par développement limité). La série $\sum {}^{-1}/_{k^3}$ est une série *convergente* dont le terme général est *de signe constant*. Par conséquent, toujours en appliquant **[92.3]** et **[81.2]**,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^3} \sim \frac{-1}{2n^2}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Bien entendu, on peut continuer de la même manière, en considérant une nouvelle série télescopique $\sum \varepsilon_k$ de somme nulle et telle que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k = \frac{1}{2n^2}.$$

On considère la série de terme général

$$\begin{aligned} w_k &= v_k + \varepsilon_k = u_k + \delta_k + \varepsilon_k \\ &= v_k - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2(k-1)^2} \end{aligned}$$

et comme

$$w_k \sim \frac{-1}{k^3\sqrt{k}}$$

(*vérifier* cet équivalent !) alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \sim \frac{-2}{5n^2\sqrt{n}}$$

(encore **[92.3]** et **[81.2]**) et finalement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{2}{5n^2\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\Big).$$