Composition de Mathématiques

Le 4 octobre 2023 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Soit $n \geqslant 2$, un nombre entier. On note

$$\omega = \exp(2i\pi/n)$$

et on considère la matrice

$$\Omega = \left(\omega^{k\ell}\right)_{0\leqslant k,\ell<n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Cette matrice est utilisée dans les calculs de Transformée de Fourier discrète, raison pour laquelle les indices suivent la convention habituelle de Python.

1. Que vaut ω^n ?
2. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k \quad \text{puis} \quad \sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{\ell p}$$

en fonction de l'entier $p \in \mathbb{N}$.
3. Calculer la matrice Ω^2. En déduire la matrice Ω^4.
4. La matrice Ω est-elle inversible ?

❖ II – Problème ❖

Soient $0 < a < 1$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,dt.$$

1. Que vaut $f(0)$?
2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, de a et de x.
3. Démontrer que f est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$.
4. Démontrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) \leqslant f(x_0).$$

Vérifier que

$$f(x_0) \leqslant a x_0 f(x_0).$$

5. Démontrer que la fonction f est identiquement nulle.

❖ III – Problème ❖

1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

et le polynôme $P_0 = X^2 - X$.
1. a. Les matrices A et B commutent-elles ?
1. b. Calculer $P_0(A)$. Que peut-on en déduire sur la matrice A ?
1. c. Calculer $P_0(B)$ et vérifier que cette matrice est inversible.

On considère deux matrices A et B appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que ces deux matrices commutent et qu'il existe un polynôme $P_0 \in \mathbb{C}[X]$ tel que la matrice $P_0(A)$ soit la matrice nulle et que la matrice $P_0(B)$ soit inversible.

2. On considère une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$AM = MB.$$

2. a. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k M = MB^k.$$

2. b. En déduire que $MP_0(B) = 0_n$, puis que $M = 0_n$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une, et une seule, matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$AM - MB = Y.$$

❖ IV – Problème ❖

Partie A. Un exemple concret

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note f, *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *représenté par* A *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer le rang de f.
2. Calculer une base $\mathscr{B}_1$ du sous-espace $\operatorname{Ker} f$.
3. On **admet** que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 6 \\ -2 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. a. Donner un vecteur directeur de $\operatorname{Im} A^2$.
3. b. Déterminer une forme linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

telle que le sous-espace $\operatorname{Ker} f^2$ soit le noyau de φ.
3. c. En déduire, *sans calculer le produit matriciel* $A^2.A$, que A^3 est la matrice nulle.
4. Déterminer un vecteur ε_4 tel que

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f^2 \oplus \mathbb{R} \cdot \varepsilon_4.$$

5. Déterminer un vecteur ε_3 tel que

$$\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \oplus \mathbb{R} \cdot \varepsilon_3.$$

Partie B. Généralisation

Soit E, *un espace vectoriel de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *sur le corps* $\mathbb{K}$ *(avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*).*
On considère un endomorphisme f *de* E *qu'on suppose nilpotent d'indice* 3, *c'est-à-dire :*

$$f^2 \neq \omega_E, \qquad f^3 = \omega_E$$

où ω_E *est l'endomorphisme identiquement nul de* E *:*

$$\forall\, x \in E, \quad \omega_E(x) = 0_E.$$

On considère enfin un endomorphisme g *de* E *qui commute à* f *:*

$$f \circ g = g \circ f.$$

6. Démontrer que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul.
7. Démontrer que

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2.$$

On notera dorénavant F_1, *le noyau de* f.

8. Démontrer que le sous-espace F_1 est stable par f.
9. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F_2 et F_3 tels que

$$\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f \oplus F_2 \quad \text{et} \quad E = \operatorname{Ker} f^2 \oplus F_3.$$

*On **admettra** que ni* F_2, *ni* F_3 *n'est réduit au vecteur nul.*

Nous allons maintenant étudier les matrices de f *et* g *relatives à une base de* E *adaptée à la décomposition en somme directe qui vient d'être définie.*

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

10. a. Démontrer que le sous-espace $F_1 \oplus F_2$ est stable par l'endomorphisme f.
10. b. Démontrer que

$$\forall\, x \in F_2, \quad f(x) \in F_1.$$

En déduire que le sous-espace F_2 n'est pas stable par f.
10. c. Démontrer que

$$\forall\, x \in F_3, \quad f(x) \in F_1 \oplus F_2.$$

11. Démontrer que les sous-espaces F_1 et $F_1 \oplus F_2$ sont stables par l'endomorphisme g.
12. On considère une base $\mathscr{B}$ de E adaptée à la décomposition en somme directe

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3.$$

12. a. Rappeler comment une telle base est construite.
12. b. Démontrer que les matrices de f et de g relatives à la base $\mathscr{B}$ sont des matrices triangulaires par blocs. Que dire des blocs diagonaux de la matrice de f ?
12. c. En déduire que

$$\det(f+g) = \det g.$$

❖ V – Problème ❖

*On **rappelle** qu'un endomorphisme* f *d'un espace vectoriel* E *normé par* $\|\cdot\|$ *est **continu** si, et seulement si, il existe une constante* $k > 0$ *telle que*

$$\forall\, u \in E, \quad \big\|f(u)\big\| \leqslant k\|u\|.$$

*Dans ce cas, la **norme subordonnée** de* f *est définie par*

$$|||f||| = \sup_{\|u\|=1} \big\|f(u)\big\|.$$

Partie A. Norme d'un projecteur

Dans cette partie, on considère l'espace $E = \mathbb{R}^2$ *muni de la norme produit :*

$$\forall\, u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\|_\infty = \max\{|x|,\ |y|\}$$

et l'endomorphisme $p \in L(E)$ *représenté par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de E*. On cherche en particulier à calculer la norme subordonnée de* p*.*

1. Calculer A^2. Que peut-on en déduire sur p ?

2. Soit $u = (x, y) \in E$. Ce vecteur est représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la colonne

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. a. Par quelle colonne le vecteur $p(u)$ est-il représenté ? En déduire l'expression de $\|p(u)\|_\infty$ en fonction de x et y.

2. b. On suppose que $\|u\|_\infty = 1$. Démontrer que

$$\|p(u)\|_\infty \leqslant 3.$$

2. c. Expliciter un vecteur u_0 tel que

$$\|u_0\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|p(u_0)\|_\infty = 3.$$

3. En déduire que l'endomorphisme p est continu et préciser la valeur de sa norme subordonnée.

Partie B. Un peu de théorie

On considère un espace vectoriel E *normé par* $\|\cdot\|$*. On rappelle que la norme subordonnée* $|||\cdot|||$ *est une norme sous-multiplicative sur l'espace* $L_c(E)$ *des endomorphismes continus de* E *:*

$$\forall\, f, g \in L_c(E), \quad |||f \circ g||| \leqslant |||f|||\,|||g|||.$$

On considère ici un projecteur continu :

$$p \in L_c(E)$$

et on étudie l'application φ *définie par :*

$$\forall\, f \in L(E), \quad \varphi(f) = \frac{1}{2} \cdot (p \circ f + f \circ p).$$

4. Démontrer que φ est un endomorphisme de $L(E)$.

5. Démontrer que le sous-espace $L_c(E)$ est stable par φ et que

$$\forall\, f \in L_c(E), \quad |||\varphi(f)||| \leqslant |||p|||\,|||f|||.$$

6. On considère en particulier $f_0 = I_E$.

6. a. Que vaut $|||f_0|||$?

6. b. Démontrer que

$$|||\varphi(f_0)||| = |||p|||\,|||f_0|||.$$

7. Conclure.

Solution I ❀ Racines de l'unité

1. On reconnaît une racine n-ième de l'unité :

$$\omega^n = 1.$$

2. Rappelons que $e^{i\theta} = 1$ si, et seulement si, le réel θ est un multiple **entier** de 2π.

❧ Comme $n \geqslant 2$, le quotient $1/n$ n'est pas un entier, donc $\omega \neq 1$ et on déduit de la somme géométrique que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$$

(d'après la question précédente).

❧ Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on peut effectuer la division euclidienne de p par n :

$$p = qn + r \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < n.$$

On en déduit que

$$\omega^p = (\omega^n)^q.\omega^r = \omega^r,$$

ce qui nous conduit à distinguer deux cas.

❧ **Premier cas :** si p est un multiple de n, alors $r = 0$ et $\omega^p = 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n.$$

❧ **Second cas :** si p n'est pas un multiple de n, alors $0 < r < n$, donc $0 < r/n < 1$ et par conséquent

$$\omega^p = \omega^r \neq 1.$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^r)^k = \frac{1-(\omega^r)^n}{1-\omega^r} = 0$$

puisque $(\omega^r)^n = (\omega^n)^r = 1^r = 1$.

3. Reprenons les notations habituelles pour poser le produit matriciel. Avec

$$\Omega = (a_{k,\ell})_{0\leqslant k,\ell<n} \quad \text{et} \quad \Omega^2 = (b_{k,\ell})_{0\leqslant k,\ell<n},$$

on a

$$b_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{n-1} a_{k,m}a_{m,\ell} = \sum_{m=0}^{n-1} \omega^{m(k+\ell)}.$$

Par conséquent, le coefficient $b_{k,\ell}$ est égal à n si $k+\ell$ est un multiple de n et à 0 dans tous les autres cas.

Comme $0 \leqslant k, \ell < n$, on ne distingue que trois cas : ou bien $k = \ell = 0$; ou bien $k+\ell = n$; ou bien $k+\ell$ n'est pas un multiple de n.

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & & ⋰ & ⋰ & 0 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

❧ Pour calculer $\Omega^4 = (\Omega^2)^2$, il est plus simple de passer par un endomorphisme représenté par Ω^2 que de continuer les calculs matriciels.

Si la matrice Ω^2 représente un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dans une base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{0\leqslant k<n},$$

alors $f(\varepsilon_0) = n\varepsilon_0$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k < n, \quad f(\varepsilon_k) = n\varepsilon_{n-k}.$$

On en déduit que

$$(f\circ f)(\varepsilon_0) = f(n\varepsilon_0) = nf(\varepsilon_0) = n^2\varepsilon_0$$

et que, pour tout $1 \leqslant k < n$,

$$(f\circ f)(\varepsilon_k) = nf(\varepsilon_{n-k}) = n\cdot(n\varepsilon_{n-(n-k)}) = n^2\varepsilon_k.$$

Tout endomorphisme de E est caractérisé par l'image de la base $\mathscr{B}$, donc $(f\circ f) = n^2\,I_E$ et

$$\Omega^4 = n^2 I_n.$$

4. La propriété précédente peut aussi s'écrire

$$\Omega.\Omega^3 = \Omega^3.\Omega = n^2 I_n,$$

ce qui prouve que la matrice Ω est inversible et que

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{n^2}\Omega^3.$$

Solution II ❀ Équation fonctionnelle

1. Par hypothèse,

$$f(0) = \int_0^0 \ldots\, dt = 0.$$

2. La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc (Théorème fondamental de l'Analyse) elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(ax) - F(0).$$

La fonction

$$x \xrightarrow{\ h\ } ax \xrightarrow{\ F\ } F(ax) \xrightarrow{\ \tau\ } F(ax) - F(0) \qquad (\star)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de trois applications de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$ (une homothétie h, puis la fonction F et enfin une translation τ).

❧ Par définition des primitives, F est dérivable et $F' = f$. D'après le Théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = aF'(ax) = af(ax).$$

3. On sait que f est de classe $\mathscr{C}^1$ (au moins).

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction F est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que primitive de f) et d'après $(\star)$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composée de trois fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

On a ainsi démontré par récurrence que la fonction f était de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle atteint un maximum sur ce segment. Il existe donc un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f(t) \leqslant f(x_0).$$

❧ Par hypothèse,

$$f(x_0) = \int_0^{ax_0} f(t)\, dt.$$

Or, par définition de x_0,

$$\forall\, t \in [0, ax_0] \subset [0, 1], \quad f(t) \leqslant f(x_0).$$

L'intégration conserve les inégalités et $ax_0 \geqslant 0$, donc

$$f(x_0) \leqslant \int_0^{ax_0} f(x_0)\, dt = ax_0 f(x_0).$$

5. D'après **[1.]**, $f(0) = 0$ donc le maximum $f(x_0)$ est positif.

Comme $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$ et $0 < a < 1$, on a $ax_0 < 1$ et, d'après la question précédente,

$$\underbrace{(1 - ax_0)}_{>0} f(x_0) \leqslant 0.$$

Par conséquent, $f(x_0) \leqslant 0$ et donc

$$f(x_0) = 0$$

par double encadrement.

❧ De même, la fonction f atteint un minimum sur $[0, 1]$ et il existe un réel $x_1 \in [0, 1]$ tel que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f(t) \geqslant f(x_1).$$

Comme plus haut (mais en inversant les inégalités), on a $f(x_1) \leqslant 0$ et

$$f(x_1) \geqslant ax_1 f(x_1) \quad \text{où} \quad ax_1 < 1.$$

On en déduit que $f(x_1) = 0$.

Ainsi, le minimum et le maximum de f sur $[0, 1]$ sont nuls, ce qui prouve que f est identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Solution III ❀ Équation matricielle

1. a. Les matrices A et B commutent, puisque

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

1. b. On constate que $A^2 = A$, donc $P_0(A) = 0_3$ et la matrice A représente un projecteur.

1. c. On commence par calculer

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -12 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

ce qui donne ensuite

$$P_0(B) = 2 \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

❧ Avec les opérations

$$C_2 \leftarrow \frac{1}{3}(C_2 + 4C_1), \qquad C_3 \leftarrow \frac{1}{3}(C_3 - 8C_1),$$

on trouve que la matrice $\frac{1}{2}P_0(B)$ est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles (donc rang supérieur à 2) et la première colonne n'est pas une combinaison linéaire des deux dernières, donc le rang de cette matrice est égal à 3.

Deux matrices équivalentes ayant même rang, on en déduit que le rang de $P_0(B)$ est égal à 3 et donc que la matrice $P_0(B)$ est inversible.

2. a. La propriété $A^k M = MB^k$ est évidente pour $k = 0$ (puisque $A^0 = B^0 = I_n$) et vraie par hypothèse pour $k = 1$.

H.R. — Supposons qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k M = MB^k$. On en déduit que

$$\begin{aligned} A^{k+1}M &= A^k.(AM) && \text{(associativité)} \\ &= A^k.(MB) && \text{(par hypothèse)} \\ &= (A^k M).B && \text{(associativité)} \\ &= (MB^k).B && \text{(par HR)} \\ &= M.B^{k+1}, && \text{(associativité)} \end{aligned}$$

ce qui prouve par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k M = MB^k.$$

2. b. Écrivons le polynôme P_0 sous forme développée :

$$P_0 = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k.$$

Alors

$$\begin{aligned} MP_0(B) &= M \sum_{k=0}^{d} \alpha_k B^k = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k MB^k \\ &= \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k M && \text{(d'après [2.a.])} \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k\Big).M = P_0(A).M \end{aligned}$$

et comme $P_0(A)$ est la matrice nulle, on en déduit que

$$M.P_0(B) = 0_n.$$

❧ Par hypothèse, la matrice $P_0(B)$ est inversible. On en déduit donc que M est la matrice nulle (en multipliant à droite par l'inverse de $P_0(B)$).

3. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, posons

$$f(M) = AM - MB \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

On définit ainsi une application

$$f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

D'après les règles de calcul matriciel (distributivité à droite et à gauche), l'application f est linéaire et d'après **[2.b.]**, son noyau est réduit à la matrice nulle, donc f est injective.

Comme f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que f est en fait un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et en particulier que f est une bijection de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, CQFD.

Solution IV ❀ Calcul de déterminant

Partie A. Un exemple concret

1. Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$ montrent que la matrice A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est alors clair que le rang de f est égal à 2.

2. Il est tout aussi clair sur la matrice A que

$$2C_1 + C_2 = 0 \quad \text{et} \quad C_1 + C_3 + C_4 = 0.$$

Par conséquent, les colonnes

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de A.

D'après **[1.]** et le Théorème du rang, la dimension du noyau de A est égale à 2 (différence entre le nombre de colonnes de A et le rang).

Dans un *plan*, un couple de vecteurs non proportionnels est une base. Par conséquent, la famille

$$\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\operatorname{Ker} A$.

3. a. La matrice A^2 n'est pas la matrice nulle (donc son rang est au moins égal à 1) et toutes ses colonnes sont proportionnelles (donc son rang est inférieur à 1), donc le sous-espace $\operatorname{Im} A^2$ est bien une droite.

L'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes, donc un vecteur directeur de $\operatorname{Im} A^2$ est la colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. b. La colonne

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

appartient au noyau de A^2 si, et seulement si, A^2X est la colonne nulle. Comme toutes les lignes de A^2 sont proportionnelles, l'équation matricielle

$$A^2X = 0$$

équivaut à l'équation scalaire

$$x - 2y + 2z - 3t = 0.$$

Ainsi, le noyau de f^2 est aussi le noyau de la forme linéaire φ définie par

$$\forall\, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x, y, z, t) = x - 2y + 2z - 3t.$$

REMARQUE.— D'après la question précédente et le Théorème du rang, le noyau de f^2 est un sous-espace de dimension 3, c'est-à-dire un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. D'après le cours, il existe donc une forme linéaire dont le noyau est égal à $\operatorname{Ker} f^2$ (et on en a trouvé une) et toutes les formes linéaires qui conviennent sont proportionnelles (donc on les connaît toutes).

REMARQUE.— On doit absolument savoir que l'expression de toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ est de la forme

$$ax + by + cz + dt$$

et ne pas perdre de temps à vérifier qu'une telle expression définit bien une forme linéaire.

3. c. D'après **[2.]** et **[3.a.]**, un vecteur directeur de $\operatorname{Im} A^2$ appartient à $\operatorname{Ker} A$.

Par conséquent, pour tout $X \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$,

$$A^3X = A\,\underbrace{(A^2X)}_{\in \operatorname{Im} A^2} = 0,$$

ce qui prouve que $A^3 = 0_4$.

4. On a démontré au **[3.b.]** que $\operatorname{Ker} f^2$ était un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. D'après le cours, *n'importe quel* vecteur ε_4 de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas à l'hyperplan $\operatorname{Ker} f^2$ dirige un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f^2$.

Il suffit donc de choisir un vecteur ε_4 dont les coordonnées ne vérifient pas l'équation cartésienne de $\operatorname{Ker} f^2$ trouvée en **[3.b.]**. Par exemple,

$$\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Par **[2.]**, la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est égale à 2 et par **[3.b.]**, la dimension de $\operatorname{Ker} f^2$ est égale à 3. Par conséquent, $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de $\operatorname{Ker} f^2$ et, comme plus haut, il suffit donc de choisir un vecteur de $\operatorname{Ker} f^2$ qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker} f$ pour diriger un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\operatorname{Ker} f^2$.

D'après **[3.b.]**, la colonne

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

appartient bien au sous-espace $\operatorname{Ker} A^2$ mais

$$A\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donc $\varepsilon_3 \notin \operatorname{Ker} A$. Ce vecteur ε_3 convient !

REMARQUE.— En concaténant les vecteurs de $\mathscr{B}_1$ et les vecteurs ε_3 et ε_4, on obtient une base $\mathscr{B}$ de

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus \mathbb{R} \cdot \varepsilon_3 \oplus \mathbb{R} \cdot \varepsilon_4.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est donc inversible (c'est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$) et on peut vérifier que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La suite du problème va expliquer pourquoi on trouve ainsi une matrice triangulaire par blocs avec des blocs diagonaux nuls.

Partie B. Généralisation

6. Par hypothèse, f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de *dimension finie*. Si le noyau de f est réduit au vecteur nul, alors f est injectif et donc inversible (Théorème du rang).

Dans ce cas, l'endomorphisme f^3 est aussi inversible (en tant que composé d'automorphismes), ce qui est impossible puisque f^3 est l'endomorphisme nul.

Le noyau de f n'est donc pas réduit au vecteur nul.

7. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. On a donc $f(x) = 0_E$ et comme f est linéaire,

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(0_E) = 0_E,$$

donc $x \in \operatorname{Ker} f^2$. Ainsi : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.

8. En tant que sous-espace vectoriel de E, l'ensemble F_1 contient le vecteur nul. Pour tout vecteur $x \in F_1 = \operatorname{Ker} f$, on a

$$f(x) = 0_E \in F_1$$

donc le sous-espace F_1 est stable par f.

9. D'après le Théorème de la base incomplète, tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie admet (au moins) un supplémentaire.

Comme E est un espace de dimension finie, le sous-espace $\operatorname{Ker} f^2$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie.

On peut donc appliquer le Théorème de la base incomplète au sous-espace $\operatorname{Ker} f$ de $\operatorname{Ker} f^2$; ainsi qu'au sous-espace $\operatorname{Ker} f^2$ de E.

10. a. Par construction, $F_1 \oplus F_2 = \operatorname{Ker} f^2$.

Si $x \in \operatorname{Ker} f^2$, alors $f^2(x) = 0_E$ et donc

$$f^2\big(f(x)\big) = f\big(f^2(x)\big) = f(0_E) = 0_E$$

donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^2$. Le sous-espace $\operatorname{Ker} f^2$ est donc stable par f.

10. b. Si $x \in F_2 \subset \operatorname{Ker} f^2$, alors

$$f\big(f(x)\big) = f^2(x) = 0_E$$

donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f = E_1$. L'image du sous-espace F_2 par f est donc contenue dans F_1.

❧ Si le sous-espace F_2 était stable par f, alors

$$\forall\, x \in F_2, \quad f(x) \in F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

(puisque F_1 et F_2 sont en somme directe) et donc $x \in \operatorname{Ker} f$.

Par conséquent, tout vecteur de F_2 appartiendrait aussi à F_1 et donc

$$F_2 \subset F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

L'énoncé ayant admis que $F_2 \neq \{0_E\}$, on en déduit que F_2 n'est pas stable par f.

10. c. Pour tout $x \in F_3$,

$$f^2\big(f(x)\big) = f^3(x) = 0_E$$

puisque f^3 est l'endomorphisme nul. On en déduit que

$$f(x) \in \operatorname{Ker} f^2 = F_1 \oplus F_2.$$

11. Soit $x \in F_1 = \operatorname{Ker} f$. On a donc $f(x) = 0_E$ et comme f et g commutent,

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = g(0_E) = 0_E,$$

ce qui signifie que $g(x) \in \operatorname{Ker} f = E_1$. Le sous-espace E_1 est donc bien stable par g.

❧ Soit $x \in F_1 \oplus F_2 = \operatorname{Ker} f^2$. Comme f et g commutent, l'endomorphisme f^2 commute aussi à g et

$$f^2\big(g(x)\big) = g\big(f^2(x)\big) = g(0_E) = 0_E,$$

ce qui signifie que $g(x) \in \operatorname{Ker} f^2$. Le sous-espace $E_1 \oplus E_2$ est aussi stable par g.

12. a. Une base de E adaptée à la décomposition en somme directe

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

est obtenue en concaténant une base $\mathscr{B}_1$ de F_1, une base $\mathscr{B}_2$ de F_2 et une base $\mathscr{B}_3$ de F_3 (dans cet ordre).

12. b. Comme on a choisi une base de E adaptée à une décomposition en somme directe de trois sous-espaces vectoriels, les matrices de f et de g sont décomposées en neuf blocs.

❧ Par définition, F_1 est le noyau de f, donc f est identiquement nulle sur F_1. La première "colonne" de la matrice est donc composée de trois blocs nuls.

D'après **[10.b.]**, l'image de F_2 par f est contenue dans F_1, c'est-à-dire

$$f_*(F_2) \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_1).$$

D'après **[10.c.]**, l'image de F_3 par f est contenue dans $F_1 \oplus F_2$, c'est-à-dire

$$f_*(F_3) \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1,\ \mathscr{B}_2).$$

La matrice de f est donc triangulaire supérieure par blocs et les trois blocs diagonaux sont nuls.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & A_2 & A_3 \\ \hline 0 & 0 & A_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} f_*(F_1) & f_*(F_2) & f_*(F_3) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathscr{B}_1 \\ \mathscr{B}_2 \\ \mathscr{B}_3 \\ \end{array}$$

❧ D'après **[11.]**, le sous-espace F_1 est stable par g :

$$g_*(F_1) \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1)$$

et l'image de F_2 par g est contenue dans $F_1 \oplus F_2$:

$$g_*(F_2) \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1,\ \mathscr{B}_2).$$

Donc la matrice de g est triangulaire supérieure par blocs.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline 0 & B_5 & B_6 \\ \hline 0 & 0 & B_9 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} g_*(F_1) & g_*(F_2) & g_*(F_3) \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathscr{B}_1 \\ \mathscr{B}_2 \\ \mathscr{B}_3 \\ \end{array}$$

12. c. D'après **[12.b.]**, la matrice de $(f+g)$ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure par blocs.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f+g) = \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \\ \hline 0 & B_5 & A_6+B_6 \\ \hline 0 & 0 & B_9 \end{array}\right)$$

On sait que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux. Donc

$$\det(f+g) = \det B_1 \times \det B_5 \times \det B_9 = \det g.$$

Solution V ❀ Applications linéaires continues

Partie A. Norme d'un projecteur

1. On trouve $A^2 = A$, donc l'endomorphisme p représenté par la matrice A est un projecteur.

2. a. D'après les règles du calcul matriciel,

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}\big(p(u)\big) = AU = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -(2x+y) \end{pmatrix}.$$

❧ Par conséquent,

$$\big\|p(u)\big\|_\infty = |2x+y|.$$

2. b. Comme le maximum est un majorant,

$$|x| \leqslant \|u\|_\infty \quad \text{et} \quad |y| \leqslant \|u\|_\infty.$$

D'après l'inégalité triangulaire et **[2.a.]**,

$$\|p(u)\|_\infty \leqslant 2|x| + |y| \leqslant 3\|u\|_\infty.$$

En particulier, si $\|u\|_\infty = 1$, alors

$$\|p(u)\|_\infty \leqslant 3.$$

2. c. On sait que l'inégalité triangulaire

$$|2x+y| \leqslant 2|x| + |y|$$

devient une égalité si, et seulement si, $2x$ et y sont de même signe.

Avec $u_0 = (1, 1)$, on a bien

$$\|u_0\|_\infty = \max\{1,\ 1\} = 1$$

et, d'après **[2.a.]**,

$$\|p(u_0)\|_\infty = |2x+y| = 3.$$

3. D'après **[2.b.]**, l'endomorphisme p est borné sur la sphère unité de E, donc lipschitzien (et *a fortiori* continu) et admet 3 pour constante de Lipschitz. Par définition de la norme subordonnée,

$$|||p||| = \sup_{\|u\|_\infty = 1} \big\|p(u)\big\|_\infty \leqslant 3.$$

❧ On a précisé cette majoration au **[2.c.]** :

$$3 = \big\|p(u_0)\big\|_\infty \leqslant \sup_{\|u\|_\infty = 1} \big\|p(u)\big\|_\infty$$

(puisque $\|u_0\|_\infty = 1$) et donc $|||p||| = 3$ (par double inégalité).

Partie B. Un peu de théorie

4. L'ensemble $L(E)$ est stable par combinaison linéaire et par composition (structure d'algèbre associative unitaire), donc $\varphi(f) \in L(E)$ pour tout $f \in L(E)$.

De plus, quels que soient $\lambda \in \mathbb{K}$, f et g dans $L(E)$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g) &= \frac{1}{2}\Big(p \circ (\lambda f + g) + (\lambda f + g) \circ p\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda p \circ f + p \circ g) && \text{(linéarité de p)} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda f \circ p + g \circ p) \\ &= \lambda\varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$

donc φ est bien un endomorphisme de $L(E)$.

REMARQUE.— Autrement dit : $\varphi \in L\big(L(E)\big)$. Eh oui !

5. Soit $f \in L_c(E)$. On sait déjà que $\varphi(f)$ est un endomorphisme de E.

Comme l'endomorphisme f est continu, on sait que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|f(x)\big\| \leqslant |||f||| \cdot \|x\|.$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \big\|\varphi(f)(x)\big\| &\leqslant \frac{1}{2}\big\|(p \circ f)(x)\big\| + \frac{1}{2}\big\|(f \circ p)(x)\big\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|||p||| \cdot \big\|f(x)\big\| && \text{(continuité de p)} \\ &\quad + \frac{1}{2}|||f||| \cdot \big\|p(x)\big\| && \text{(continuité de f)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}|||p||| \cdot |||f||| \cdot \|x\| && \text{(continuité de f)} \\ &\quad + \frac{1}{2}|||f||| \cdot |||p||| \cdot \|x\| && \text{(continuité de p)} \\ &\leqslant |||p||| \cdot |||f||| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Cet encadrement prouve que l'endomorphisme $\varphi(f)$ est continu (lipschitzien en fait) et en particulier que

$$\left|\left|\left|\varphi(f)\right|\right|\right| \leqslant |||p||| \cdot |||f|||.$$

6. a. Pour tout $x \in E$,

$$\left\| I_E(x) \right\| = \|x\| \leqslant 1 \cdot \|x\|,$$

donc l'endomorphisme I_E est bien continu. Par définition,

$$|||I_E||| = \sup_{\|x\|=1} \left\| I_E(x) \right\|$$

donc $|||I_E||| = 1$.

6. b. Pour $f_0 = I_E$, il est clair que

$$\varphi(f_0) = p$$

et donc que

$$\left|\left|\left|\varphi(f_0)\right|\right|\right| = |||p||| = |||p||| \cdot |||f_0|||$$

puisque $|||f_0||| = 1$ d'après **[6.a.]**.

7. D'après **[5.]**, l'endomorphisme

$$\varphi \ : \ L_c(E) \to L_c(E)$$

est continu et sa norme subordonnée est majorée par $|||p|||$.

Par **[6.b.]**, la norme subordonnée de $\varphi \in L_c(E)$, définie par

$$\sup_{|||g|||=1} \left|\left|\left|\varphi(g)\right|\right|\right|$$

est égale à $|||p|||$ (cette borne supérieure est en fait un maximum, atteint au moins pour $g = f_0$).