Séries numériques [57.4]

❧ Rappelons les deux théorèmes que nous allons employer dans la suite. Un peu de rigueur ne peut pas nuire...

Critère spécial des séries alternées.

Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $|u_n|$ tende vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Théorème de comparaison par équivalence.

Si $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et si les v_n sont de signe constant, alors la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente. (**[47.3]** et **[47.4]**)

❧ Si $\alpha > 0$, les deux séries étudiées sont alternées et leurs termes généraux tendent bien vers 0. En revanche, la *décroissance* de $|u_n|$ n'est pas évidente, ce qui doit rendre prudent : le Critère spécial des séries alternées ne s'applique peut-être pas !

❧ Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right). \qquad \text{(Eq. 1)} \end{aligned}$$

On pose alors

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} + v_n$$

et que, d'après (Eq. 1),

$$v_n \sim \frac{-1}{n^{3\alpha/2}} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, la série (de Riemann)

$$\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$$

est une série dont le terme général est de signe constant et on sait que cette série converge si, et seulement si, $3\alpha/2 > 1$, c'est-à-dire si $\alpha > 2/3$. On déduit alors de la relation de comparaison (Eq. 2) que la série $\sum v_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 2/3$ (*Théorème de comparaison par équivalence*).

Pour tout $\alpha > 0$, le Critère spécial des séries alternées s'applique évidemment à la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}},$$

qui est donc convergente. Ainsi donc,

– si $\alpha > 2/3$, la série $\sum u_n$ est convergente (somme de deux séries convergentes) ;
– si $0 < \alpha \leqslant 2/3$, la série $\sum u_n$ est divergente (somme d'une série convergente et d'une série divergente) ;
– si $\alpha = 0$, le dénominateur s'annule pour tous les entiers n impairs !
– si $\alpha < 0$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Finalement, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 2/3$.

REMARQUE.— Pour des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ dont les termes généraux *ne sont pas* de signe constant, le Théorème de comparaison dit seulement que : si $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum a_n$ est *absolument convergente* si, et seulement si, la série $\sum b_n$ est *absolument convergente*.

En appliquant ce théorème à la relation :

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}},$$

on peut *seulement* démontrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente pour tout $\alpha > 2$ et qu'elle *n'est pas* absolument convergente pour $\alpha \leqslant 2$. Il est *impossible* d'en déduire que la série est (semi-)convergente dans le cas $3/2 < \alpha \leqslant 2$.

❧ La même méthode s'applique pour la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Si $\alpha > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big[1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)\Big] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\Big(\frac{1}{n^{2\alpha}}\Big). \end{aligned}$$

On pose donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

de telle sorte que

$$v_n \sim \frac{-1}{n^{2\alpha}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est une série dont le terme général est de signe constant. Donc, d'après le *Théorème de comparaison par équivalence*, la série $\sum v_n$ est convergente si, et seulement si, la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est convergente, c'est-à-dire si $\alpha > 1/2$.

Par ailleurs, il est clair que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

converge pour tout $\alpha > 0$ (d'après le *Critère spécial des séries alternées*).

En conclusion, puisque

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n,$$

la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$ (même discussion que plus haut).