Calculs algébriques

I

Coefficients binomiaux

1. Quel est le plus grand coefficient binomial $\binom{n}{k}$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Parmi les entiers $\binom{n}{k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, il y a un nombre pair d'entiers impairs (puisque la somme est paire).

3. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}.$$

(Par récurrence ou en sachant que $\binom{2n}{n}$ majore tous les $\binom{2n}{k}$, dont la somme est égale à 2^{2n}.)

II

Systèmes linéaires

4.1 La solution du système

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

est $(x, y) = (1, 0)$.

4.2 La solution du système

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

est $(x, y) = (9/7, 4/7)$.

5. La solution du système

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ x - y + z = -1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

est $(x, y, z) = (0, 2, 1)$.

6. La solution du système

$$\begin{cases} 4x - y - z = 8 \\ x + 4y - z = -10 \\ -x + y + 5z = -9 \end{cases}$$

est $(x, y, z) = (1, -3, -1)$.

7. Le triplet (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ -x + 2y + 7z = 2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = (2 + t, 2 - 3t, t).$$

8. Le triplet (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = (t, 7 - 11t, 3 - 4t).$$

9. Le triplet (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ - y + 3z = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = (-t, 9t, 3t).$$

10. Le triplet (x, y, z) est une solution du système

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 7z = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z) = (-t, 2t, t).$$

11. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} ax + (1+a)y + (1+2a)z = a^2 + a \\ x + y + 2z = a \\ ax + y + (1+a)z = 2 \end{cases}$$

12. Soit $m \in \mathbb{R}$. On étudie le système (S) suivant.

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$$

12.1 Si $m = 0$, le système (S) n'a pas de solution.

12.2 Si $m = 1$, les solutions sont les triplets $(1, t, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

12.3 Si $m = -1$, les solutions sont $(-1, -t, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

12.4 Dans tous les autres cas, le système (S) admet pour seule solution le triplet $(m, 1, 1/m)$.

13. Résoudre les systèmes suivants en discutant sur le paramètre réel t.

13.1

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ tx - y = 2 \end{cases}$$

13.2

$$\begin{cases} x + ty = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

13.3

$$\begin{cases} tx + y = 1 \\ tx - y = -1 \end{cases}$$

III

Sommes

14. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell} = \frac{(-1)^\ell - 1}{2}.$$

15. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \frac{1}{\ell^2} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^2} = H_n.$$

16. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i - j) = 0.$$

2
Fonctions usuelles

1. Graphes des expressions suivantes.

$$\ell n(1+x) \quad \ell n(1-x) \quad e^{-x} \quad e^{-|x|} \quad x^{\alpha}$$
$$\frac{e^x-1}{x} \quad (\ell n\, x)^2 \quad \frac{\ell n\, x}{x} \quad \frac{e^x}{e^x-1} \quad \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$
$$\frac{1}{1+x^2}$$

2. Dériver les expressions suivantes.

$$e^{3x+2} \quad \cos^2 3x \quad \ell n(1+e^x)$$
$$\frac{\sin x}{x} \quad e^{\sin x} \quad \ell n(1-x+2x^2)$$
$$\sqrt{1+\sqrt{x}} \quad \frac{2\sin x-1}{3\cos x+1} \quad \frac{\cos 2x+\sin 3x}{\cos 6x}$$
$$\ell n\,\frac{1+x}{2-x} \quad \cos(3\,\ell n\, x)$$

3. Discriminant d'un polynôme
3.1 Condition nécessaire et suffisante pour que la racine de f' soit aussi une racine de

$$f(x) = x^2+px+q.$$

3.2 Condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines de f' soit aussi une racine de

$$f(x) = x^3+px+q.$$

I
Compositions et produits

4. Symétries des expressions suivantes ?

$$f(\cos x) \quad f(x^2) \quad \sin x f(\cos^2 x) \quad x f(x^2)$$

5. Monotonie des expressions suivantes ?

$$e^{x^2+1} \quad \frac{x^2}{1+e^{-x}} \quad \frac{e^{-2x}}{1+x} \quad \sin(1-e^{-x^2})$$

6.1 Une somme de fonctions croissantes est croissante.
6.2 Une composée de fonctions croissantes est croissante.
6.3 L'inverse d'une fonction croissante de signe constant est décroissante.
6.4 Un produit de fonctions croissantes est-il une fonction croissante ?
7. Calculer la dérivée de f, puis celle de g.

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(1+\sqrt{x}) \qquad g(x) = \sqrt{2e^x+1}(1+\sqrt{e^x})$$
$$f(x) = \ell n\,\sqrt{1+x^2} \qquad g(x) = \ell n\,\sqrt{1+e^{2x}}$$
$$f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad g(x) = e^x\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}$$

II
Calculs de limites

8. Avec les formes indéterminées classiques :

$$\frac{\ell n(1-\sqrt{t})}{\sin^2 t} \underset{t\to 0}{\sim} -t^{-3/2}$$
$$\frac{\sqrt{t^2+1}-\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{\sim} t^{5/2}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\sqrt{t}}{\ell n(1-\sqrt{t})} = -1$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\sin^2 t} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-\cos t}{\sin t} = 1$$
$$\lim_{t\to +\infty} t^2\big[\ell n(t^2+1)-\ell n(t^2-1)\big] = 2$$
$$\lim_{t\to +\infty} t\Big(e^{1/t}-\sqrt{\cos\frac{1}{t}}\Big) = 1$$
$$\lim_{t\to 0}(1-\cos t)^{\operatorname{sh} t} = 1$$
$$\lim_{t\to +\infty}\Big(1-\sin\frac{1}{t}\Big)^{3t} = e^{-3}$$
$$\lim_{t\to 1}(1-t^2)\tan\frac{\pi t}{2} = \frac{4}{\pi}$$

III
Fonctions trigonométriques et hyperboliques

9. Dériver les expressions suivantes.

$$\sin(x^2) \quad \sin^2 x \quad \cos^2 x$$
$$\sin(e^x) \quad \cos(e^x)$$

10. Calculer la dérivée n-ième des expressions suivantes.

$$e^{-x}\sin x \qquad e^x\cos x$$

(On peut appliquer la formule de Leibniz ou passer en complexes.)
11. Étudier et représenter

$$\frac{1}{\cos x}$$

en fonction de x.
Pourquoi cette fonction est-elle appelée **sécante** ?
12. Étudier et représenter

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

en fonction de x.

IV

Fonctions réciproques

13. Pour tout $x > 0$,

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Et pour $x < 0$?

14.

$$2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{2}} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pi 2$$

15. Pour $x \in [-1, 1]$,

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x \quad \text{et} \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

15.1 L'équation

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} + \operatorname{Arcsin} \frac{1}{3}$$

admet $x = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ pour seule solution.

15.2 Les solutions de l'équation

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} \sqrt{2}x = \frac{\pi}{4}$$

vérifient $1 - 2x^2 = 0$. Par conséquent, la seule solution de l'équation est $x = \sqrt{2}/2$.

16. L'équation

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} \frac{-1}{5}$$

n'a pas de solution (le second membre est $> \pi/2$).

17.1 La fonction

$$f = [x \mapsto \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x]$$

est constante, égale à $\pi/2$, sur $[-1, 1]$.

17.2 L'équation

$$\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos} \frac{-3}{4} - \operatorname{Arcsin} \frac{3}{4}$$

admet $x = 0$ pour seule solution.

17.3 L'équation

$$\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos} \frac{-3}{4} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{4}$$
$$\left(= \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{Arcsin} \frac{3}{4} > \pi \right)$$

n'a pas de solution.

18. Si

$$[-\pi/2, \pi/2] \ni \operatorname{Arcsin} ax = \operatorname{Arccos} x \in [0, \pi],$$

alors x et ax sont positifs. On en déduit que

$$ax = \sqrt{1 - x^2}$$

et donc que

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

19.1 Pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ et $t = \frac{\cos 2\theta}{2}$, on a

$$\sqrt{\frac{1}{2} - t} = \sin\theta \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{2} + t} = \cos\theta.$$

19.2 Pour tout $t \in [0, 1/2]$,

$$\operatorname{Arcsin} \sqrt{1/2 - t} + \operatorname{Arcsin} \sqrt{1/2 + t} = \frac{\pi}{2}.$$

19.3 Le graphe de la fonction

$$[x \mapsto \operatorname{Arcsin} \sqrt{x}]$$

admet le point de coordonnées $(1/2, \pi/4)$ pour centre de symétrie. (Tracer ce graphe !) Par conséquent,

$$\int_0^1 \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

20. Soient

$$x = \sin \frac{\operatorname{Arcsin} 3/4}{2} \quad \text{et} \quad y = \cos \frac{\operatorname{Arcsin} 3/4}{2}.$$

Alors $2xy = 3/4$ et $(x + y)^2 = 7/4$, donc x et y sont les racines de l'équation

$$z^2 - \frac{\sqrt{7}}{2} z + \frac{3}{8} = 0.$$

Donc

$$x = \frac{\sqrt{7} - 1}{4} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{7} + 1}{4}.$$

21. Les angles $\alpha = \operatorname{Arcsin} 4/5$ et $\beta = \operatorname{Arcsin} 5/13$ vérifient

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

Par conséquent, l'équation

$$\operatorname{Arcsin} x = \alpha + \beta$$

admet $x = \frac{63}{65}$ pour unique solution.

22.1 L'expression

$$f(x) = \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin}(x^2 - x + 1)$$

est définie si, et seulement si, $x \in [-1, 1]$.

22.2 Pour $x \in [-1, 1]$, l'équation

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

équivaut à $x = x^2 - x + 1$, c'est-à-dire à $x = 1$.

23. Si $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation

$$\operatorname{Arctan}(3 - x) + \operatorname{Arctan}\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

alors x est aussi solution de l'équation $3x^2 - 5x + 2 = 0$. Les solutions sont 1 et $2/3$.

24.1 Si $0 < a < \pi/2 < b < \pi$, alors $\pi/2 < a + b < 3\pi/2$ et

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

24.2 Si $x > 1$, alors $b = 2 \operatorname{Arctan} x \in]\pi/2, \pi[$ et

$$\tan b = \frac{2x}{1 - x^2}.$$

24.3

$$\operatorname{Arctan} 2\sqrt{2} + 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{2} = \pi$$

25. La fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arccos} \operatorname{th} x + 2 \operatorname{Arctan} e^x$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle. La fonction f est donc constante, égale à π.

26. La fonction f définie par

$$f(x) = 2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{Arctan} x$$

est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\pi/2$.
Avec $x = 1$, on en déduit que $\tan \pi/8 = \sqrt{2} - 1$ et avec $x = \sqrt{3}$, que

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

27. Suite de Fibonacci
La suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la donnée de $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$, ainsi que par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

27.1 Identité de Cassini
Par récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n.$$

27.2 Pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{f_{2p}} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{f_{2p+1}} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{f_{2p+2}}.$$

28. Fonctions hyperboliques réciproques
28.1 La fonction ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Pour tout $y \geqslant 1$,

$$\operatorname{Arg}\operatorname{ch} y = \ell\mathrm{n}(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

et pour tout $y > 1$,

$$\operatorname{Arg}\operatorname{ch}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

28.2 La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arg}\operatorname{sh} y = \ell\mathrm{n}(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}\operatorname{sh}' y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

28.3 La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Pour tout $y \in\,]-1, 1[$,

$$\operatorname{Arg}\operatorname{th} y = \frac{1}{2} \ell\mathrm{n} \frac{1+y}{1-y} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}\operatorname{th}' y = \frac{1}{1-y^2}.$$

V

Études de fonctions

29. Étude et graphes des fonctions suivantes (ensemble de définition, dérivées, comportement asymptotique...).

$$x^2 e^{-x} \qquad \frac{\ell\mathrm{n}\, x^3}{1+x^2} \qquad x^3\, \ell\mathrm{n}(1+x^2)$$

$$\frac{e^{x \ell\mathrm{n} x}}{x^2} \qquad \sin x . e^{-x} \qquad \ell\mathrm{n} \frac{2+x}{3+x}$$

30. Étudier la fonction

$$f(x) = \exp\Big(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

en fonction des paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

31. Étudier l'expression

$$\frac{t}{x^2 + t^2}$$

d'abord en fonction de $x \in \mathbb{R}$ (le réel t étant fixé), puis en fonction de $t \in \mathbb{R}$ (le réel x étant fixé).

32. Étudier la fonction f définie par

$$\forall\, x \in [0, \pi/4], \qquad f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

33. Polynômes de degré 3
Tracer le graphe de f en fonction du paramètre K.
33.1 Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + K.$$

La dérivée est proportionnelle à $(x-2)(x+1)$ et

$$f(-1) = K + 7 \qquad f(2) = K - 20.$$

33.2 Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + K.$$

La dérivée est proportionnelle à $(x-1)x$ et

$$f(0) = K \qquad f(1) = K - 1.$$

33.3 Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = 4x^3 - 3x + K.$$

La dérivée est proportionnelle à $(2x-1)(2x+1)$ et

$$f(1/2) = K - 1 \qquad f(-1/2) = K + 2.$$

34. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \ell\mathrm{n}(1 - x - x^2).$$

Cette fonction atteint son maximum en $x = 1/2$.

35. Soit $n \geqslant 2$, un entier. Lorsque x parcourt le segment $[0, 1/2]$, l'expression

$$f_n(x) = x(1-2x)^{n-1}$$

est maximale pour $x = 1/2n$.

36. Étudier le signe de

$$e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (1 + 2x)$$

en fonction de x. (Il s'agit de la différence entre une fonction et sa tangente au point d'abscisse $x = 0$.)

37. Étudier $\ell\mathrm{n}\operatorname{ch} x$. Vérifier en particulier que

$$\ell\mathrm{n} \operatorname{ch} x \underset{x\to+\infty}{=} x - \ell\mathrm{n}\, 2 + o(1).$$

En déduire l'asymptote au voisinage de $-\infty$ par un argument de symétrie.

38. Ensemble de définition de la fonction

$$f = \left[x \mapsto \sqrt{x}\,\ell\mathrm{n}\,\frac{1+x}{x}\right].$$

Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

39. Étude et graphe de la fonction

$$f = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right].$$

40. Étude et graphe de la fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{\ell\mathrm{n}\,t}{t}\right].$$

Application : si $1 \leqslant n < p$ sont deux entiers naturels tels que

$$n^p = p^n,$$

alors $n = 2$ et $p = 4$.

41. Soit $a > 0$. Les solutions de l'équation

$$\frac{\ell\mathrm{n}\,x}{\ell\mathrm{n}\,a} = \frac{\ell\mathrm{n}\,a}{\ell\mathrm{n}\,x}$$

sont $x = a$ et $x = {}^1/_a$.

42. Les solutions de l'inéquation

$$\sqrt{x+1} \leqslant 2 - x$$

appartiennent nécessairement à l'intervalle $[-1, 2]$. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle

$$\left[-1, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right].$$

43. L'inéquation

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leqslant 1 - x$$

a un sens si, et seulement si, $x \in [-1, 1[$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-1, 0]$.

44. La fonction

$$f = \left[x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} x^3\right]$$

réalise une bijection de $I = \mathbb{R}$ sur $J =]-\pi, \pi[$. L'équation

$$f(x) = \frac{3\pi}{4}$$

admet donc une, et une seule, solution réelle α et cette solution est strictement supérieure à 1. Comme cette solution vérifie aussi l'équation

$$\frac{x - x^3}{1 - x^4} = -1,$$

on en déduit que

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

45. Étude et graphe de la fonction

$$f = \left[t \mapsto \operatorname{Arctan}(t-1) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right].$$

Application : l'équation

$$f(t) = \operatorname{Arctan}\frac{19}{8}$$

admet une, et une seule, solution α strictement plus grande que 1. Comme α est aussi solution de l'équation

$$\frac{x^2 - x - 1}{2x - 1} = \frac{19}{8},$$

on en déduit que $\alpha = \frac{11}{2}$.

46. Graphe de

$$f_\lambda = \left[x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\right]$$

en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. (On précisera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_2(x) \geqslant 2(1 - 2x).$$

47. Asymptotes obliques et verticales des fonctions suivantes.

47.1

$$\frac{2x^2 - x + 3}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{3}{x-1}$$

47.2

$$\frac{2x^2 + 1}{2x + 1} = x - 2 + \frac{1}{2x+1}$$

47.3

$$\frac{3x^2 - 4x + 3}{x - 2} = 3x + 2 - \frac{1}{x-2}$$

48. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ell\mathrm{n}(1+x) \leqslant x.$$

(Cas d'égalité ?)
Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ell\mathrm{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

49. Étudier $f(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 9} = |2x + 3|$. Préciser la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

50. On pose

$$f(x) = \left|\frac{1 + |x|}{1 - |x|}\right|.$$

Quel est l'ensemble de définition de f ? L'application f est-elle continue ? dérivable ? Tracer l'allure de son graphe.

VI

Bijections

51. Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

52. On pose

$$f(x) = \frac{1-x}{x-3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$.

53. L'application g définie par

$$g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. La bijection réciproque a pour expression

$$g^{-1}(y) = \frac{3+y}{y-2}.$$

54. Déterminer l'intervalle I contenant π tel que l'application f définie par

$$f(x) = \sin(2x+1)$$

réalise une bijection de I sur $[0,1]$.

55. L'application f définie par

$$f(x) = 2x + |x-1|$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer la réciproque.
Que dire des applications g et h suivantes ?

$$g(t) = 2e^t + |e^t - 1|$$
$$h(t) = 2\,\ell n\, t + |\ell n\, t - 1|$$

56. Une primitive de $g(x) = 3x^2 + 2$ est donnée par

$$G(x) = x^3 + 2x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 3).$$

L'application f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 3}$$

réalise une bijection de $[-1,1[$ sur $\left[0, \sqrt{6}\right[$.

57. L'application g définie par

$$g(x) = \sin(1 - 2e^{-x^2})$$

réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I (à préciser).
La bijection réciproque est-elle dérivable en $y = 0$?

58. Appliquer le Théorème d'inversion aux applications suivantes.

$e^x + e^{1-x}$	$x - \sqrt{x+2}$	$\dfrac{e^x}{e^x - 1}$	(sur $]0, +\infty[$)
$e^x + x - 2$	$1 + \ell n(1 + x^2)$	$\ell n\, \dfrac{1-x}{1+x}$	
$2 + \ell n\, x - x$	$2e^x - x - 3$	$\left(\dfrac{x+2}{2x+3}\right)^2$	

59.1 L'équation $2 + \ell n\, x = x$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]0,1[$ et une solution dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
59.2 L'équation $2e^x - 3 = x$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et une solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

60. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un, et un seul, réel positif u_n tel que

$$1 - u_n - u_n^n = 0 \quad \text{et} \quad 0 < u_n < 1.$$

Nombres complexes

1. Exponentielle complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Calculer $\overline{e^z}$, $(e^z)^{-1}$, $\mathfrak{Re}(e^z)$, $|e^z|$, $\mathfrak{Im}(e^z)$ et $\operatorname{Arg} e^z$.

2. On considère les points A, B et C, d'affixes respectives

$$1+3i, \qquad 8+i, \qquad 5+6i.$$

Comme $AB = \sqrt{53}$, $BC = \sqrt{34}$ et $AC = 5$, le triangle ABC n'est pas isocèle.

3. Calculer les conjugués des nombres complexes suivants.

$$\frac{3-4i}{5+2i+e^{3-4i}} \quad \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^3 \quad \frac{e^{3+4i}}{e^{-3+4i}}$$

4. Calculer le module des nombres complexes suivants.

$$\frac{2+i}{2-i} \quad \frac{3+e^{2i}}{3+e^{-2i}} \quad \frac{3+e^{i\pi/2}}{3-e^{i\pi}}$$

5. Le module de $(3+2i)(1+2i) = -1+8i$ est égal à 13×5, soit $1+64$.

6. Soient $a_1, \dots, a_n$, des nombres complexes. Si un nombre complexe z vérifie la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k} = 0,$$

alors c'est une combinaison convexe des a_k :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big) \cdot z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

avec

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_k = \frac{1}{|z-a_k|^2} > 0.$$

7. Si la fonction affine f définie par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az+b$$

vérifie $f(0) = 0$ et $f(1+2i) = 3+2i$, alors $b = 0$ et

$$a = \frac{3+2i}{1+2i} = \frac{7-4i}{5}.$$

Le module de a est égal à $\sqrt{13/5}$.

8. On note I_n, l'ensemble des entiers *pairs* compris entre 0 et n (inclus).

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} = \sum_{p\in I_n} \binom{n}{p} i^p = \mathfrak{Re} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} i^\ell$$
$$= \mathfrak{Re}[(1+i)^n] = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}.$$

9. Les racines carrées complexes de

$$\Delta = 8+6i$$

sont $\pm(3+i)$. Les racines du polynôme

$$X^2 - 2(1+2i)X - (11+2i)$$

sont donc $4+3i$ et $-2+i$.

10.

$$X^2 + X + (5i-5) = (X-2+i)(X+3-i)$$

11.

$$X^2 + 2X + 3 = (X+1+\sqrt{2}i)(X+1-\sqrt{2}i)$$

12.

Z_1	Z_2	$S = Z_1 + Z_2$	$P = Z_1 Z_2$
$1+i$	$2-i$	3	$3+i$
$-1+2i$	-1	$-2+2i$	$1-2i$
$3-2i$	$1+3i$	$4+i$	$9+7i$

13. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(z+i)^n = (z-i)^n.$$

Démontrer que z est réel. (On n'est pas obligé de résoudre l'équation !)

I

Trigonométrie

14. Quels que soient a et b réels, il existe un réel φ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Le réel φ est caractérisé modulo 2π par les deux propriétés suivantes :

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Applications numériques

a	b	$\sqrt{a^2+b^2}$
1	2	$\sqrt{5}$
3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{11}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$	3
2	-1	$\sqrt{5}$
-3	1	$\sqrt{10}$
1	4	$\sqrt{17}$
$1/2$	2	$\sqrt{17}/2$

15.

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

16. Quels que soient a et b,

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x \sin 2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}.$$

17.

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

18. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18.1 Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\sin(k+1)x = \sin kx \cos x + \cos kx \sin x,$$
$$\cos(k+1)x = \cos kx \cos x - \sin kx \sin x.$$

18.2 En sommant ces égalités pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient le système suivant.

$$\begin{cases} (1-\cos x)\cdot S_n - \sin x \cdot C_n = -\sin(n+1)x \\ \sin x \cdot S_n + (1-\cos x)\cdot C_n = 1-\cos(n+1)x \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est égal à $4\sin^2(x/2)$.

19. Linéarisations

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$$
$$\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$$
$$\cos^4\theta = \frac{3+4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$$
$$\sin^4\theta = \frac{3-4\cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$$
$$\cos^6\theta = \frac{10+15\cos 2\theta + 6\cos 4\theta + \cos 6\theta}{32}$$

20. Formes développées

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\cos 3\theta = \cos\theta\cdot(4\cos^2\theta - 3)$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = \sin\theta\cdot(3-\sin^2\theta) = \sin\theta\cdot(4\cos^2\theta - 1)$$

21.1 Le réel x est solution de l'équation

$$\sin x.\sin 2x = 0$$

si, et seulement si, $x \equiv 0 \pmod{\pi/2}$.

21.2 L'équation

$$\sin x.\sin 2x = 1$$

n'a pas de solution réelle.

21.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin x.\sin 2x = 2(1-\cos^2 x)\cos x.$$

La fonction f est périodique, de période 2π. Sa dérivée s'annule lorsque $\sin x = 0$ ou $\cos^2 x = 1/3$. On en déduit les extrema de f.

22.1 Le réel x est solution de l'équation

$$\cos x.\cos 2x = 0$$

si, et seulement si, $x \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$ ou $2x \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$.

22.2 Le réel x est solution de l'équation

$$\cos x.\cos 2x = 1$$

si, et seulement si, $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

23.1 L'équation

$$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 5$$

n'a pas de solution.

23.2 Le réel x est solution de l'équation

$$\sqrt{5}\cos x - \sin x = 2$$

si, et seulement si, $\cos(x+\varphi) = \sqrt{2/3}$ avec

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{5}{6}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

23.3 Le réel x est solution de l'équation

$$2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{5}$$

si, et seulement si, $\cos(x-\psi) = \sqrt{5/7}$ avec

$$\cos\psi = \frac{2}{\sqrt{7}} \quad \text{et} \quad \sin\psi = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

24.

1. L'équation
$$3\cos x + \sin x = 4$$
n'a pas de solution réelle.
2. Il existe un réel φ tel que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 3\cos x + \sin x = \sqrt{10}\cos(x-\varphi).$$

L'équation $3\cos x + \sin x = 3$ admet $x = 0$ et $x = 2\varphi$ pour solutions.

II

Exponentielle complexe

25. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

26. Angle moitié

26.1 Pour $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$,

$$1 + e^{i\theta} = \rho.e^{i\alpha}$$

avec $\rho = 2\cos(\theta/2) \geqslant 0$ et $\alpha = \theta/2$.

26.2 Pour $-\pi < \theta < \pi$,

$$\frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{z}{\bar{z}} = e^{2i\alpha} = e^{i\theta}.$$

27. Soit $k \in \mathbb{N}$, supérieur à 2. L'équation

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

équivaut à

$$\left(2\cos\frac{(k-1)\theta}{2}\right)\cdot e^{i(k+1)\theta/2} = 1\cdot e^{i0}.$$

Il faut donc que les deux facteurs soient égaux à 1 ou à -1.

28. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) \neq 1$ (c'est-à-dire ?).

28.1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{in\theta/2}\frac{\sin[(n+1)\theta]/2}{\sin\theta/2}.$$

28.2 En dérivant :

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{ik\theta} = \frac{ne^{in\theta/2}\sin[(n+1)\theta/2]}{2\sin\theta} - \frac{i(n+1)e^{in\theta/2}\cos[(n+1)\theta/2]}{2\sin\theta/2} + \frac{ie^{in\theta/2}\sin[(n+1)\theta/2]\cos\theta 2}{2\sin^2\theta/2}.$$

(À vérifier !)

III

Racines n-ièmes complexes

29. Racines cubiques
On note $j = \exp(2i\pi/3)$.

$$1 + j + j^2 = 0 \qquad 1 + j - j^2 = -2j^2$$
$$1 - j + j^2 = -2j \qquad \frac{1 + j - j^2}{1 - j + j^2} = j$$
$$(1 + j)^2 = j \qquad (1 - j)(1 + j^2) = -2i\,\mathfrak{Im}(j)$$
$$(1 - j)^3 = -6i\,\mathfrak{Im}(j) \qquad \frac{1}{j^2 - j + 1} = \frac{-j^2}{2}$$
$$\frac{(j+1)^3}{1-j} = \frac{-1}{1-j}\cdots \qquad \frac{1+j^2}{(j-1)^3} = \cdots$$
$$j + \overline{j} = -1 \qquad 1.j.j^2 = 1$$

30. Racines cinquièmes
On pose $\zeta = e^{2i\pi/5}$ et $z = \zeta + \overline{\zeta}$. Comme la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle, on a

$$z^2 + z - 1 = 0.$$

On en déduit z et donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

31.

$$(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$$
$$(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^3 = 2(i-1)$$

32. Module de $(3 + 2i)^3$?

33. Calculer les racines complexes des polynômes suivants. Préciser la somme et le produit de ces racines.

33.1

$$(z+1)^3 - (z-i)^3 = 3(1+i)z^2 + 4z + 1 - i$$

33.2

$$3(z+1)^n - z^n = 2z^n + 3nz^{n-1} + \cdots + 3$$

33.3

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 2nz^{n-1} + 0z^{n-2} + \cdots + [(-1)^n - (-1)^n]$$

34.1 Le nombre complexe z vérifie

$$\left(\frac{z-i}{z-2i}\right)^4 = 1$$

si, et seulement si, le quotient $(z-i)/(z-2i)$ appartient à $\{-1; \pm i\}$.

34.2 Le nombre complexe z vérifie

$$\left(\frac{2z-1}{z+i}\right)^3 = 1$$

si, et seulement si, le quotient $(2z-1)/(z+i)$ appartient à $\mathbb{U}_3$.

34.3

$$\left(\frac{z+j}{j(z-j)}\right)^4 = 1 \iff \left(\frac{z+j}{z-j}\right)^4 = j$$

35. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$\omega = \exp\frac{2i\pi}{n}.$$

35.1

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^n = 0$$

35.2 Si $p \in \mathbb{N}$ est un multiple de n, alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^p = n.$$

Sinon, cette somme est nulle.

36. Pour $n \in \mathbb{N}$ supérieur à 2, on note $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

36.1 En factorisant par l'angle moitié,

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1| = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{2}{\sin(\pi/2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{\pi}.$$

36.2 De même,

$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|^2 = 4\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \cos\frac{2k\pi}{n}\right) = 2n$$

puisque la somme des racines n-ième est nulle.

Pour aller plus loin

37. Polynômes de Tchebychev
Les polynômes de Tchebychev de première espèce vérifient

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

et les polynômes de deuxième espèce vérifient

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\quad U_n(\cos\theta)\sin\theta = \sin(n+1)\theta.$$

37.1 La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev de première espèce est définie par la donnée de

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n.$$

Les premiers sont :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= X \\ T_2 &= 2X^2 - 1 \\ T_3 &= 4X^3 - 3X \\ T_4 &= 8X^4 - 8X^2 + 1 \\ T_5 &= 16X^5 - 20X^3 + 5X. \end{aligned}$$

37.2 La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce est définie par la donnée de

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_1 = 2X$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad U_{n+1} + U_{n-1} = 2XU_n.$$

Les premiers sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= 1 \\ U_1 &= 2X \\ U_2 &= 4X^2 - 1 \\ U_3 &= 8X^3 - 4X \\ U_4 &= 16X^4 - 12X^2 + 1. \end{aligned}$$

37.3 Quels que soient m et n dans $\mathbb{N}$, on a

$$T_m \circ T_n = T_n \circ T_m = T_{mn}.$$

(Pas de propriété analogue pour les U_k !)
37.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n'(x) = nU_{n-1}(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \neq \pm 1, \quad U_n'(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}$$

et (par développement limité)

$$U_n'(1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad U_n'(-1) = (-1)^n U_n'(1).$$

38. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.
38.1 Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} &\left|1 + \frac{z}{n}\right|^2 = \left(1 + \frac{r\cos\theta}{n}\right)^2 + \left(\frac{r\sin\theta}{n}\right)^2 \\ &\left(1 + \frac{z}{n}\right)^2, = \left[1 + \frac{2r\cos\theta}{n} + \frac{r^2\cos 2\theta}{n^2}\right] + i\left[\frac{2r\sin\theta}{n} + \frac{r^2\sin 2\theta}{n^2}\right]. \end{aligned}$$

38.2

$$\lim_{n\to+\infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = e^{r\cos\theta}$$

38.3 Pour $n \geqslant 2$, la détermination principale α_n de l'argument de $(1 + z/n)$ est déterminée par

$$\tan\alpha_n = \frac{r\sin\theta}{n + r\cos\theta}$$

donc la détermination principale de l'argument de $(1 + z/n)^n$ tend vers $r\sin\theta$.
38.4 Pour tout nombre complexe $z = re^{i\theta}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^{r\cos\theta} \cdot e^{ir\sin\theta}.$$

38.5 (Hors sujet) Lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{(1 + z/n)^2}{|1 + z/n|^2} = 1 + \frac{2r\sin\theta}{n} \cdot i + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

39. Fonction numérique de Leibniz
Soient a, b et c, trois nombres complexes.
39.1 Les solutions z de l'équation

$$|z-a|^2 + |z-b|^2 + 2|z-c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|c|^2$$

sont aussi les solutions de l'équation

$$\left|z - \frac{a+b+2c}{4}\right|^2 = \left|\frac{a+b+2c}{4}\right|^2.$$

Leurs images décrivent un cercle qui passe par l'origine.
39.2 Les solutions z de l'équation

$$|z-a|^2 + |z-b|^2 - 2|z-c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|c|^2$$

sont aussi les solutions de l'équation

$$\mathfrak{Re}\big(\overline{z}(a+b-2c)\big) = 0.$$

En supposant que $z = re^{i\theta}$ et $a + b - 2c = \rho e^{i\alpha} \neq 0$, cela revient à résoudre

$$e^{i(\alpha-\theta)} \in i\mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Les images de ces solutions parcourent une droite qui passe par l'origine.
39.3 On suppose que $a \neq b$ et on choisit $0 < k < 1$. Les solutions z de l'équation

$$|z-a| = k|z-b|$$

sont aussi les solutions d'une équation de la forme

$$\left|z - \frac{a - k^2 b}{1-k^2}\right|^2 = K.$$

Il existe deux solutions de la forme

$$z = (1-t)a + tb$$

avec $t \in \mathbb{R}$. L'image des solutions est donc un cercle dont le centre a pour affixe

$$\omega = \frac{a - k^2 b}{1-k^2}.$$