Intégrales [79.]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\right]$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et est $\mathcal{O}(1/t^3)$ au voisinage de $+\infty$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\, dt$$

est définie sur $\mathbb{R}$. (Il est clair que cette fonction est *paire*.)

❧ Pour $x \neq 0$,

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad 0 < \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant e^{-x^2 t}$$

et le majorant est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction de référence, dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ est connue). Comme l'intégration conserve les inégalités,

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}\, dt = \frac{1}{x^2}$$

et donc

$$\forall\, x > 0, \quad 0 < x^2 f(x) \leqslant 1$$

ce qui prouve bien que

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— En particulier, on a prouvé que f tendait vers 0 au voisinage de $+\infty$.

REMARQUE.— D'après ce qui précède, on a aussi $f(x) = \mathcal{O}(1/x^2)$ lorsque $x \to 0$. Cependant, cette nouvelle relation est dénuée d'intérêt car la fonction de référence $1/x^2$ est infiniment grande au voisinage de 0 tandis que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^3} \leqslant \frac{1}{1+t^3}$$

et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = f(0).$$