Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

✍ *Il s'agit manifestement d'une série alternée. La valeur absolue du terme général*

$$|u_n| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

peut être lue comme la moyenne des $(n+1)$ *premiers termes d'une suite de limite nulle et le théorème de Cesaro nous assure alors que le terme général tend vers* 0. *Il reste à étudier le sens de variation de la suite* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

❧ *On peut aussi remarquer que* $(n+1)|u_n|$ *peut s'exprimer à l'aide des nombres harmoniques. Il s'agit de la somme des harmoniques* impairs *et l'astuce taupinale nous indique alors que :*

$$(n+1)|u_n| = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

Si on est savant, on peut utiliser la formule d'Euler :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

❧ **Première méthode**

Nous allons appliquer le Critère spécial des séries alternées : la série $\sum u_n$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0.

Ayant interprété l'expression $|u_n|$ comme une moyenne, on peut interpréter ensuite $|u_{n+1}|$ comme une moyenne de moyennes (ce qu'on appelait *associativité du barycentre* quand c'était au programme).

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1} \\
&= \frac{1}{n+2}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n+3}\Big) \\
&= \frac{n+1}{n+2}|u_n| + \frac{1}{n+2}\frac{1}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, il est clair que

$$\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2k+1}.$$

En sommant sur k, on en déduit que

$$\frac{n+1}{2n+3} \leqslant (n+1)|u_n|,$$

puis que

$$\frac{1}{n+2}\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{n+2}|u_n|$$

et enfin que

$$|u_{n+1}| \leqslant \frac{n+1}{n+2}|u_n| + \frac{1}{n+2}|u_n| = |u_n|.$$

Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites, donc la série $\sum u_n$ converge.

❧ **Deuxième méthode**

Comme on l'a remarqué,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\Big(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n\Big).$$

On déduit alors de la formule d'Euler que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\Big(\frac{2\,\ell n(2n+1) - \ell n\, n}{2(n+1)} + \frac{\gamma}{2(n+1)}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Cela nous donne une décomposition de la série $\sum u_n$ en somme de trois séries :

— la série alternée
$$\sum (-1)^n\Big(\frac{2\,\ell n(2n+1) - \ell n\, n}{2n+2}\Big),$$

— la série alternée
$$\sum (-1)^n\Big(\frac{\gamma}{2n+2}\Big)$$
qui converge (les conditions d'application du Critère spécial sont clairement vérifiées)

— et une troisième série absolument convergente d'après le Théorème de comparaison (le terme général étant dominée par le terme d'une série de Riemann convergente).

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série alternée

$$\sum (-1)^n\Big(\frac{2\,\ell n(2n+1) - \ell n\, n}{2n+2}\Big)$$

converge. Il est clair que le terme général de cette série tend vers 0. Il ne reste qu'à vérifier la propriété de monotonie.

Posons
$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) = \frac{2\,\ell n(2x-1) - \ell n(x-1)}{x}$$
de telle sorte que
$$\Big(\frac{2\,\ell n(2n+1) - \ell n\, n}{2n+2}\Big) = \frac{1}{2}f(n+1).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$:
$$f'(x) \sim \frac{-\ell n\, x}{x^2},$$
ce qui prouve que $f'(x) < 0$ pour tout x assez grand et donc que f est décroissante au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, la suite de terme général $f(2n+1)$ est décroissante à partir d'un certain rang (qu'il est inutile de chercher à préciser) et on peut conclure à l'aide du Critère spécial : la série $\sum u_n$ est convergente en tant que somme de trois séries convergentes.