L'espace vectoriel

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \ : \ f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

est muni de la norme définie par

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\| = \|f'\|_\infty.$$

Démontrer que l'application linéaire φ *définie par*

$$\forall\, f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

est continue et calculer sa norme.

❧ Il est clair que l'application

$$\varepsilon \ : \ \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$$

définie par

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \quad \varepsilon(f) = \big(f(0), f(1)\big)$$

est linéaire. Par conséquent, l'ensemble $E = \operatorname{Ker} \varepsilon$ est bien un sous-espace de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

❧ Toute fonction $f \in E$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc sa dérivée f' est continue sur le segment $[0,1]$. Par conséquent, la dérivée f' est bornée et $\|f\|$ est bien définie pour tout $f \in E$.

On *sait* que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Par conséquent, il est clair que $\|f\| \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in E$; par linéarité de la dérivation, l'application $\|\cdot\|$ est positivement homogène sur E et vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\|f+g\| = \|f'+g'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\| + \|g\|.$$

Il reste à vérifier la séparation des points : si $\|f\| = 0$, alors la dérivée f' est identiquement nulle sur l'intervalle $[0,1]$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme), donc la fonction f est constante sur $[0,1]$. Or $f(0) = f(1) = 0$, donc la fonction constante f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

Ainsi, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

✍ *La propriété de séparation des points n'est pas vérifiée sur* $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$*, donc* $\|\cdot\|$ *n'est pas une norme sur cet espace (elle vérifie cependant tous les autres axiomes).*

❧ Comme toute fonction $f \in E$ est continue sur le segment $[0,1]$, l'intégrale

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

est bien définie. On déduit de la linéarité de l'intégrale que φ est une *forme linéaire* sur E.

$$\varphi \ : \ E \to \mathbb{R}.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et que $f(0) = 0$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = f(0) + \int_0^1 f'(u)\,du = \int_0^1 f'(u)\,du.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \int_0^t \big|f'(u)\big|\,du$$

et comme

$$\forall\, u \in [0,1], \quad \big|f'(u)\big| \leqslant \|f'\|_\infty = \|f\|,$$

on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \int_0^t \|f\|\,du \leqslant \|f\|.$$

En appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on obtient

$$\forall\, f \in E, \quad \left|\varphi(f)\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)\right| \,dt \leqslant \|f\|.$$

Cet encadrement prouve que la forme linéaire φ est continue sur l'espace E muni de la norme $\|\cdot\|$.

✍ *Pour calculer la norme de φ, définie par*

$$|||\varphi||| = \sup_{\|f\|=1} \left|\varphi(f)\right|,$$

nous allons commencer par trouver un encadrement plus précis de $\left|\varphi(f)\right|$ en tenant compte de la contrainte $f(1) = 0$ (que nous avons ignorée jusqu'ici).

❧ Pour respecter la symétrie, on peut appliquer deux fois le Théorème fondamental :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = \int_0^t f'(u)\,du = -\int_t^1 f'(u)\,du.$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|f(t)\right| \leqslant t\|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \left|f(t)\right| \leqslant (1-t)\|f'\|_\infty$$

(toujours par inégalité triangulaire).

D'après la relation de Chasles,

$$\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt + \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$$

et par inégalité triangulaire,

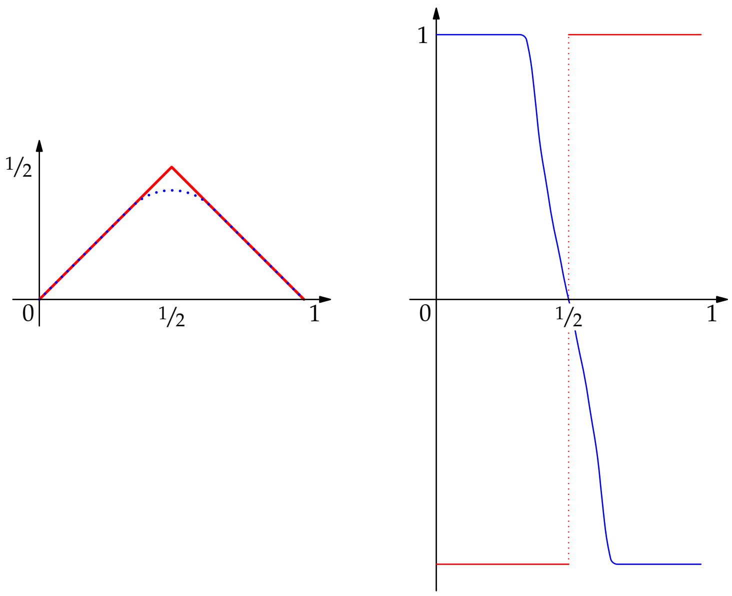
$$\begin{aligned}\left|\varphi(f)\right| &\leqslant \int_0^{1/2} \left|f(t)\right|\,dt + \int_{1/2}^1 \left|f(t)\right|\,dt \\ &\leqslant \int_0^{1/2} t\|f\|\,dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\|f\|\,dt = 2 \times \frac{1}{8} \cdot \|f\|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall\, f \in E, \quad \left|\varphi(f)\right| \leqslant \frac{1}{4}\|f\|$$

et il apparaît que $|||\varphi||| \leqslant 1/4$.

✍ *Pas de calcul de primitive,* SVP *! On calcule ici l'aire d'un triangle de base 1 et de hauteur $1/2$ (courbe rouge dans la figure de gauche).*



❧ Comme on le voit, la courbe rouge (qui donne le cas d'égalité dans les majorations précédentes) n'est pas le graphe d'une fonction $f \in E$. Néanmoins, on peut approcher cette courbe par certaines fonctions de E (à gauche en bleu) dont la norme est toujours égale à 1 (cf les graphes des dérivées sur la figure de droite).

On devine ainsi qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \bigl|\varphi(f_n)\bigr| = 1/4,$$

ce qui prouve que $|||\varphi||| = 1/4$.