> *On considère la série* $\sum u_n$ *dont le terme général est* positif *et on suppose que*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$
>
> *Démontrer que la série* $\sum u_n$ *converge.*

✍ *Comme la série* $\sum u_n$ *est une série de terme général* positif, *la suite* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *de ses sommes partielles est croissante.*

Une suite monotone $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *est convergente si, et seulement si, elle admet au moins une suite extraite* $(S_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergente.*

En reformulant l'hypothèse de l'énoncé au moyen des sommes partielles de la série, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_{2n} \leqslant \Big(1+\frac{1}{n}\Big)S_n.$$

Cela doit suggérer d'étudier la suite extraite $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$.

D'après l'énoncé,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad S_{2^{k+1}} \leqslant \Big(1+\frac{1}{2^k}\Big)S_{2^k}.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad S_{2^k} \leqslant S_2 \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{2^i}\Big).$$

Or

$$\ell n \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{2^i}\Big) = \sum_{i=1}^{k-1} \ell n(1+2^{-i})$$

et

$$\ell n(1+2^{-i}) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^i}.$$

On déduit alors du théorème de comparaison que la série

$$\sum \ell n(1+2^{-i})$$

est convergente. Par continuité de la fonction exp, on en déduit que la suite de terme général

$$P_k = \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{2^i}\Big)$$

converge également, ce qui prouve que la suite extraite $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente et majorée, donc elle converge. Autrement dit, la série $\sum u_n$ est convergente.