Calcul matriciel

1. Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Préciser leur dimension.
1.1 $\mathbb{R}^3$
1.2 $\mathbb{R}_3[X]$
1.3 $\mathbb{R}[X]$
1.4 L'ensemble des suites réelles convergentes.
1.5 L'ensemble des suites réelles de limite nulle.
1.6 L'ensemble des suites constantes.
1.7 L'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

I

Relations de liaison

2. La famille

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est libre.
3. Les familles suivantes sont libres.
3.1

$$1, (X-1), (X-1)(X-2), (X-1)(X-2)(X-3)$$

3.2

$$1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^2(X-2)$$

On répondra
- en cherchant les relations de liaison (fastidieux) ;
- en étudiant les racines et leur multiplicité ;
- sans aucun calcul.

4. Le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 3.
5. Le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et

$$2C_1 + C_2 - 3C_3 = 2C_1 - C_3 - C_4 = 0.$$

6. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible.

II

Matrices d'application linéaire

7. On considère le sous-espace E de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions

$$\begin{aligned} u_1 &= [\theta \mapsto \sin\theta], \\ u_2 &= [\theta \mapsto \cos\theta], \\ u_3 &= [\theta \mapsto \sin 2\theta], \\ uf_4 &= [\theta \mapsto \cos 2\theta] \end{aligned}$$

et l'application f définie par

$$\forall\, u \in E, \quad f(u) = u'.$$

1. La dimension de E est égale à 4.
2. L'application f est un endomorphisme de E.
3. La matrice de f relative à la base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est la suivante.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible ?
8. Pour tout $P \in E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose

$$f(P) = (1-X)P' + X^2P''.$$

La matrice de f relative à la base canonique de E est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est-elle inversible ? Quel est son spectre ?
9. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Quelle est son image ? Quel est son noyau ? La matrice M est-elle la matrice d'un projecteur ?
10. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Quelle est son image ? Quel est son noyau ? La matrice M est-elle la matrice d'un projecteur ?
11. L'application f définie par

$$f(x,y,z) = (2x+y, y+2z, x-z)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa matrice relative à la base canonique ? Quelle est l'image de cette matrice ? Quel est son noyau ?

12. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
Le noyau de A est dirigé par $(2, -1)$; le noyau de $(A - 7I)$ est dirigé par $(1, 2)$; le noyau de $(A + 7I)$ est réduit au vecteur nul.

13. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
si bien que
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Alors
$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A^2 = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$$
et
$$\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Im} A = [x + y + z = 0].$$

14. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$
Le noyau de A est la droite dirigée par $(1, 1, 1)$; le noyau de $(A + I)$ est réduit au vecteur nul.

15. EDHEC 2013 Eco
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A^2 n'est pas la matrice nulle, mais $A^3 = 0_3$. Le noyau de A est égal à l'image de A^2.

16. EDHEC 2013 S

16.1 On considère l'endomorphisme f représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice suivante.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
L'image de f est un plan stable par f.

16.2 On considère l'endomorphisme g représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice suivante.
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Le noyau de $(g - \mathrm{I})$ est un plan stable par g.

17. On considère l'espace vectoriel $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme
$$f = \left[M \mapsto M^\top \right].$$

17.1 La famille
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
est une base de E. Quelle est la matrice de f relative à cette base ?

17.2 La famille
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
est une base de E. Quelle est la matrice de f relative à cette base ?

18. Agro 2003 (****)
Soient X et Y, deux variables aléatoires. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} X + 1 & 2Y \\ -2Y & -(X + 1) \end{pmatrix}.$$

18.1 La matrice A est inversible si, et seulement si,
$$-(X + 1)^2 + 4Y^2 \neq 0,$$
c'est-à-dire
$$(2Y + X + 1)(2Y - X - 1) \neq 0.$$

18.2 Le spectre de A est un singleton si, et seulement si, la matrice A n'est pas inversible. (Penser à la trace !)

III

Sous-espaces supplémentaires

19. Le sous-espace des matrices de trace nulle et la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot I_n$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

20. Avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
on a
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Le noyau de A est dirigé par $(0, 1, 1)$, le noyau de A^2 a pour équation $[x + y - z = 0]$.
2. Le noyau de $(A - 2I)$ est dirigé par $(1, 1, 0)$, le noyau de $(A + 2I)$ est réduit au vecteur nul.
3. Le noyau de A^2 et le noyau de $(A - 2I)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

21. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le noyau de $(A - 2I)$ est représenté par l'équation
$$x - y + z = 0.$$
2. La droite dirigée par $u_3 = (1, 1, 1)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(A - 2I)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. Le spectre de A est réduit à 2.

22. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de $(A - I)$ est la droite dirigée par $(1,1,1)$; le noyau de $(A + I)$ est réduit au vecteur nul.
Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{Ker}(A^2 - I) = \mathrm{Ker}(A - I)$$

et

$$\mathrm{Ker}(A^2 + I) = [x - y + z = 0]$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

23. Banque CCINP 71
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique.
Le sous-espace P d'équation $[x + y + z = 0]$ et le sous-espace D dirigé par le vecteur $(1,2,3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Pour tout vecteur $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $p(u) \in P$ et $q(u) \in D$ tel que

$$u = p(u) + q(u)$$

et

$$p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z,\ -2x + 4y - 2z,\ -3x - 3y + 3z).$$

L'application $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire. Quelle est la matrice de p relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

24. Calcul de puissances
Calculer les puissances des matrices suivantes.

24.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

24.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

25. EDHEC 2016 S
On suppose que $X(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A.$$

IV

Changement de base

26. Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = B \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. Le réel α peut-il être nul ?
2. Calculer la trace de A. Que vaut α ? Est-ce possible ?

28. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de passage possible est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

29. EDHEC 2010 Eco
Les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

sont inverses l'une de l'autre. La matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2/3, -2/3, 0).$$

30. EDHEC 2012 S
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

30.1 Le noyau de A est la droite vectorielle dirigée par $(0, 1, 1)$. Le noyau de $(A - 2I_3)$ est la droite vectorielle dirigée par $(1, 1, 0)$.
30.2 Le noyau de

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est le plan d'équation $[x + y - z = 0]$. En posant

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = AV,$$

on obtient une base de ce plan.
30.3 La matrice A est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

31. EDHEC 2016 Eco
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.
31.1 Calculer $A^2 - 4A$. En déduire que le spectre de A est réduit au singleton $\{2\}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
31.2 On note (u_1, u_2), une base du sous-espace $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. La famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est égale à

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_3.$$

32. BL 2020
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

32.1 La matrice P est inversible et

$$P^3 - 2P^2 + 3P - 3I_3 = 0_3.$$

De plus,

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-1, -1, 2)$$

et en particulier

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{tr}(A^n) = 2(-1)^n + 2^n.$$

32.2 Un polynôme annulateur de A est

$$Z = (X+1)(X-2) = X^2 - X - 2.$$

Les matrices

$$\Pi_{-1} = \frac{1}{3}(2I_3 - A) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{3}(I_3 + A)$$

représentent des projecteurs et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 2^n\Pi_2 + (-1)^n\Pi_{-1}.$$

33. BL2022
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

33.1 La matrice P est inversible et

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-1, 0, 2).$$

33.2 Un polynôme annulateur de A est

$$Z = X(X+1)(X-2) = X^3 - X^2 - 2X.$$

Les matrices

$$\Pi_0 = -1/2 \cdot (A^2 - A - 2I_3)$$
$$\Pi_{-1} = \frac{-1}{3} \cdot (A^2 - 2A)$$
$$\Pi_2 = \frac{5}{6} \cdot (A^2 + A)$$

représentent des projecteurs et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = (-1)^n\Pi_{-1} + 2^n\Pi_2.$$

En revanche,

$$A^0 = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2.$$

34. BL 2023
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

34.1 L'image de A est le plan d'équation cartésienne

$$x + 2y + z = 0.$$

Le noyau de A est la droite dirigée par $(1, 2, 1)$. L'image et le noyau de A sont orthogonaux (pour la structure euclidienne canonique).

34.2 La matrice P est inversible et

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(6,6,0).$$

35. ESSEC E 2019
On pose

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on considère la matrice

$$M = C.L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

35.1 Comme $M^2 = 0_3$, la matrice M n'est pas inversible.
35.2 La matrice P est inversible et $PC = E_1$.
35.3 Déterminer une matrice inversible Q telle que

$$Q^\top . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions,

$$PMQ = PCLQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices M et PMQ sont-elles semblables ?
35.4 Le noyau de M est le plan d'équation

$$x + 2y - z = 0.$$

Trouver une matrice inversible P_0 telle que

$$P_0^{-1}MP_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et vérifier que $\alpha = 0$.

36. EM Lyon 2019 - Partie A
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

36.1 Quel est le spectre de la matrice A ? Est-elle inversible ?
36.2 La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = D = \text{Diag}(1/2, 1, 2).$$

Que vaut D^{-1} ?
36.3 En posant

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

calculer Q^2 et QDQ. En déduire que A et A^{-1} sont semblables.

37. EM Lyon 2019 - Partie B
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x,\ -z,\ y+2z).$$

37.1 Expliciter la matrice M qui représente f dans la base canonique. Vérifier que cette matrice est inversible.
37.2 Calculer l'image par f des vecteurs

$$u_1 = (1,0,0) \quad \text{et} \quad u_2 = (0,1,-1).$$

On suppose qu'un vecteur u_3 vérifie l'équation

$$f(u_3) - u_3 = u_2. \tag{E}$$

Alors la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi que la famille $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$.
Écrire la matrice $M - I_3$. En déduire que le vecteur $u_3 = (0,0,-1)$ vérifie l'équation (E).
37.3 On note M_1 (resp. M_2), la matrice de f relative à la base $\mathscr{B}_1$ (resp. à la base $\mathscr{B}_2$). On a alors

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $M_1M_2 = I_3$. Les matrices M_1 et M_2 sont-elles semblables ?
37.4 Les matrices M et M^{-1} sont semblables.

38. EM Lyon 2019 - Partie C
On considère la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $N = T - I_3$.
38.1 La matrice T est inversible. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0_3$, donc $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$. En déduire que

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

38.2 On considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice N dans la base canonique.
Il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(g \circ g)(u) \neq 0 \quad \text{et} \quad (g \circ g \circ g)(u) = 0.$$

Pour un tel vecteur u, la famille

$$\mathscr{B}_0 = \big((g \circ g)(u),\ g(u),\ u\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de g dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N^2 - N.$$

En déduire que N et $N^2 - N$ sont semblables.
38.3 Les matrices T et T^{-1} sont semblables.

39. EM Lyon 2021
Soient a, b et c, trois réels. On considère la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}.$$

39.1 Soit f, l'endomorphisme représenté par la matrice $M(a,b,c)$ dans une base

$$\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2, e_3).$$

Quelle est la matrice de f relative à la base

$$\mathscr{B}_2 = (e_2, e_1, e_3) \quad ?$$

39.2 Démontrer que les matrices $M(a,b,c)$, $M(b,a,c)$ et $M(a,c,b)$ sont semblables.

40. EDHEC E 2019

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

40.1 On pose

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $N^2 = 0_3$ et $A^2 - 2A = I_3$, d'où

$$A^{-1} = 2I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN = nA + (1-n)I_3.$$

Cette expression est-elle aussi valable pour $n = -1$?

40.2 Le spectre de A est réduit à $\{1\}$ et A n'est pas diagonalisable.

40.3 On pose $u_1 = (f - \mathrm{I})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$. La famille

$$\mathscr{B} = (u_1, u_2, e_1)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f relative à la base $\mathscr{B}$?

40.4 La matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

41. Ecricome 2023 Appliquées

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$ de $E = \mathbb{R}^4$.

41.1 On considère les vecteurs

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1) \qquad u_2 = (0, -1, 1, 0)$$
$$u_3 = (0, 1, 1, 0) \qquad u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

et la famille $\mathscr{B} = (u_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$.

41.2 La famille $\mathscr{B}$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ? En déduire une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $A = PTP^{-1}$.

41.3 Vérifier que $A^3 = 4A^2 - 4A$. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A.$$

Ce couple (a_n, b_n) est-il unique ? Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = 4a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -4a_n.$$

En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

Indiquer comment finir le calcul.

42. Ecricome 2018 Eco

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

42.1 La matrice P est inversible et

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(3,4,3), \quad P^{-1}BP = \mathrm{Diag}(0,2,3).$$

En déduire que $\mathrm{tr}(A^2) = 34$ et $\mathrm{tr}(B^2) = 13$ (sans trop de calculs).

42.2 On suppose que Q est une matrice inversible telle que

$$Q^{-1}BQ = \mathrm{Diag}(3,0,2).$$

Que vaut $Q^{-1}AQ$?

42.3 On suppose que Q est une matrice inversible telle que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(3,3,4).$$

La matrice $Q^{-1}BQ$ est-elle nécessairement diagonale ?

43. Ecricome 2019 Eco

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

43.1 On suppose que la matrice A représente un endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$e_1 = (1,1,-1), \quad e_2 = (2,-1,1), \quad e_3 = (-1,2,1).$$

Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle inversible ?

43.2 On considère maintenant la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec un minimum de calculs, trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}MP$ soit triangulaire. La matrice M est-elle inversible ?

44. Ecricome 2021 Eco
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

44.1 Quelle est l'image par f du vecteur $e_1 = (1, 1, 0)$?

44.2 Donner une base du plan d'équation $[x - y + z = 0]$. Calculer l'image par f des vecteurs de cette base.

44.3 En déduire une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \operatorname{Diag}(0, -2, -2).$$

V

Réduction

45. EDHEC 2012 Eco
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et $A^4 = I_3$.
En caractérisant les sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(A \pm I_3)$, on montre que A n'est pas diagonalisable.
En calculer $\operatorname{Ker}(A^2 + I_3)$, on montre que A^2 est diagonalisable.

46. EDHEC 2015 Eco
Caractériser l'image et le noyau de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme $X(X+1)(X-3) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C. Quelles sont les valeurs propres de C ? Caractériser les sous-espaces propres associés.

47. EDHEC 2017 S
On considère la matrice

$$A = -(n+1)I_n + J$$

où $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Sachant que $J^2 = nJ$, on trouve que

$$A^2 + (n+2)A + (n+1)I_n = (A + I_n)\big(A + (n+1)I_n\big) = 0_n.$$

On en déduit le spectre de A. Cette matrice est-elle inversible ? diagonalisable ?

48. ESCP 2020 T
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

48.1 En calculant $A^3 - 2A^2$, on trouve que

$$P_0 = X^3 - 6X^2 - 18$$

est un polynôme annulateur de $(2A)$.

48.2 En étudiant la fonction polynomiale associée à P_0, on trouve que la matrice A n'a qu'une seule valeur propre (réelle) et n'est donc pas diagonalisable.

49. EDHEC 2020 E
On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices antisymétriques.

49.1 Étant donnée une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\forall\, M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = A^\top.M + M.A.$$

Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, quelle que soit la matrice A choisie.

49.2 Les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

constituent une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

49.3 On suppose que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de f relative à la base $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Extraire de $\mathscr{B}$ une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

50. BSB 2019 T
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

50.1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

50.2 La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, d'inverse

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

51. EDHEC 2019 S
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

51.1 Le polynôme minimal de A est $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$ et le polynôme caractéristique de A est $(X-1)^2(X-2)$.
51.2 On cherche une matrice inversible de la forme

$$P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1,1,2)$.

1. En interprétant P comme la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathscr{B} = (u_1, v_1, v_2)$, il faut que

$$\mathrm{Vect}(u_1, v_1) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{I}) \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \cdot v_2 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}).$$

2. Comme

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

la seule matrice possible est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

51.3 Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On peut décomposer le vecteur x dans la base $\mathscr{B}$: la projection sur $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{I})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I})$ est $\Pi_2 = A - I_3$ et la projection conjuguée est $\Pi_1 = I_3 - \Pi_2 = 2I_3 - A$.
51.4 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (2I_3 - A) + 2^n (A - I_3).$$

Et aussi pour $n \in \mathbb{Z}$!